

THÈSE

présentée par

Arnaud COATANHAY

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DU HAVRE

SPÉCIALITÉ: INSTRUMENTATION ET COMMANDE

Diffusion acoustique par un objet cylindrique à proximité d'une interface plane

Soutenue publiquement le 26 janvier 2000 devant le jury composé de

<i>Président :</i>	Michel TRINITÉ	Directeur de Recherche au C.N.R.S., Rouen
<i>Rapporteurs :</i>	Martine ROUSSEAU Frédéric MOLINET	Chargé de Recherche au C.N.R.S., Paris VI Directeur de la société MOTHEMIM
<i>Examineurs :</i>	Jean-Marc CONOIR Jean HARDY Francine LUPPÉ Gérard MAZE	Chargé de Recherche au C.N.R.S., Le Havre Chargé de Recherche au C.N.R.S., Angers Professeur à l'Université du Havre Professeur à l'Université du Havre

Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Électronique
U.P.R.E.S. A C.N.R.S. 6068
Université du Havre

*à Isabelle,
en toute évidence.*

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Électronique (L.A.U.E. U.P.R.E.S. A C.N.R.S. 6068) de l'université du Havre. Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J. RIPOCHE, anciennement directeur du L.A.U.E., et Monsieur le Professeur G. MAZE, actuel directeur du laboratoire, pour les moyens qu'ils ont mis à ma disposition afin de me permettre de mener à bien ce travail.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur F. MOLINET, Directeur de la société MOTHEMIM, et à Madame M. ROUSSEAU, Chargé de Recherche au C.N.R.S., qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Michel TRINITÉ, Directeur de Recherche au C.N.R.S., et à Monsieur J. HARDY, Chargé de Recherche au C.N.R.S., qui ont accepté de juger ce travail.

Je remercie Monsieur J.-M. CONOIR pour avoir dirigé ce travail, et pour m'avoir donné l'opportunité de développer un sujet original dans un contexte de grande ouverture d'esprit.

J'exprime ma profonde gratitude à Madame le Professeur F. LUPPÉ et à Monsieur le Professeur J.-L. IZBICKI avec lesquels j'ai pu profiter d'échanges tant scientifiquement stimulants que chaleureusement amicaux.

Il m'est également agréable de remercier Messieurs P. REMBERT, P. PAREIGE, A. TINEL, J. DUCLOS, H. DUFLO, P. BÉNARD ainsi que l'ensemble des membres du laboratoire pour leur disponibilité technique et le soutien amical qu'ils m'ont accordés.

Je remercie enfin mon épouse dont la patience et l'indulgence furent les plus précieux encouragements pour mener à bien mon travail de thèse.

Table des matières

Table des figures	vii
-------------------	-----

Introduction générale	1
-----------------------	---

Chapitre 1

Diffusion par un cylindre en champ libre	3
---	----------

Introduction	4
1.1 Notations et formalisme mathématique	4
1.1.1 Géométrie du problème	4
1.1.2 Expression des ondes incidentes et diffusées	5
1.2 Le tube élastique	8
1.2.1 Détermination de l'opérateur \mathbf{T} du tube élastique	8
1.2.2 Application numérique	13

Chapitre 2

Généralisation de la méthode des images	16
--	-----------

Introduction	17
2.1 Présentation	17
2.1.1 Géométrie du problème	17
2.1.2 La méthode des images	17
2.2 L'interface quelconque	21
2.2.1 Réaction de l'interface plane	21
2.2.2 Réaction directe du cylindre	24
2.2.3 Interactions multiples	25
2.2.4 Onde diffusée initiale	26
2.2.5 Théorie générale et méthode des images	28
2.3 Développements	29
2.3.1 La méthode des images généralisée et la formulation intégrale	29
2.3.2 Présentation synthétique de la théorie	31

Chapitre 3	
Analyse du modèle de réflexion directe	38

Introduction	39
3.1 Problème théorique lié au coefficient de réflexion	39
3.1.1 Série de Fourier	39
3.1.2 Exploitation Numérique	42
3.2 Interface fluide-fluide	43
3.2.1 Premier cas	43
3.2.2 Second cas	54
3.2.3 Influence de l'absorption	63
3.3 interface fluide-solide	68
3.4 Synthèse	72

Chapitre 4	
Cylindre à proximité d'une interface plane (étude numérique)	73

Introduction	74
4.1 Analyse harmonique	74
4.1.1 Influence du premier rayon	77
4.1.2 Influence du deuxième rayon	77
4.1.3 Influence du troisième rayon	77
4.1.4 Application numérique	78
4.1.5 Comparaison avec la méthode des images généralisée	80
4.2 Analyse temporelle	82
4.3 Cylindre élastique	86

Chapitre 5	
Étude du cylindre enfoui	89

Introduction	90
5.1 Modélisation du cylindre enfoui	90
5.1.1 Géométrie du problème	90
5.1.2 Onde diffusée par le cylindre	91
5.1.3 Transmission de l'onde cylindrique	93
5.2 Application numérique	97
5.2.1 Configuration harmonique	97
5.2.2 Configuration à fréquence variable	100

Chapitre 6	
Étude du cylindre à section non circulaire	104

Introduction	105
6.1 Présentation générale	105
6.1.1 Cylindre mou	106
6.1.2 Cylindre rigide	110
6.1.3 Cylindre élastique	112
6.2 Application numérique	113
6.2.1 Relation de récurrence	113
6.2.2 Cas du cylindre à section elliptique	116

Conclusion	120
-------------------	------------

Annexes	121
----------------	------------

Annexe A	
Singularités du coefficient de réflexion	122

A.1 Interface fluide-fluide	122
A.1.1 Les pôles	122
A.1.2 Les points de branchement	123
A.2 Interface fluide-solide	125
A.2.1 Les pôles	125
A.2.2 Les points de branchement	125

Annexe B	
Fonction de Green : série et intégration	126

Annexe C	
Géométrie des rayons	127

C.1 Premier parcours	127
C.2 Deuxième parcours	128
C.3 Troisième parcours	130
C.3.1 Première étape : Calcul de la longueur $p_2p_4_s$	132
C.3.2 Seconde étape : Calcul de la longueur $p_4_sM_s$	133
C.3.3 Détermination de l'inconnue $\cos \beta_1$	133
C.3.4 Éléments géométriques du troisième rayon	135

Annexe D	
Rappels sur la transformation de Sommerfeld-Watson	136
D.1 Application à la diffusion cylindrique	137
D.2 Relation avec les ondes de surface	138

Annexe E	
Diffusion par un cylindre élastique à section non circulaire	140
E.1 Données du problème	140
E.1.1 Le milieu fluide	140
E.1.2 Le milieu élastique	141
E.2 Équations de continuité	142
E.2.1 Continuité du déplacement normal	142
E.2.2 Continuité de la contrainte normale	142
E.3 Résolution du problème	144

Bibliographie	145
----------------------	------------

Table des figures

1.1	Vue en coupe du cylindre	5
1.2	Vue en coupe du tube	9
1.3	Matrice \mathbf{M} du système 1.28	12
1.4	Norme de la fonction de forme du tube	15
2.1	Vue en coupe du cylindre et de l'interface	18
2.2	Vue en coupe du cylindre et de son image symétrique	19
2.3	Contour de Sommerfeld	22
2.4	Un contour de Sommerfeld particulier	22
2.5	Vue en coupe des deux ondes planes incidentes	27
2.6	Vue en coupe de l'onde plane incidente	27
2.7	Schéma général	29
2.8	Point source à proximité de l'interface	30
2.9	Plan de coupe du guide onde	34
3.1	Disque de convergence pour la variable z	40
3.2	Bande de convergence pour la variable θ	41
3.3	Contour de Sommerfeld d'intégration numérique	42
3.4	Réflexion de l'interface plane fluide-fluide	43
3.5	Réfraction de l'interface plane fluide-fluide	43
3.6	Coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (premier cas)	45
3.7	Norme du coefficient de réflexion fluide-fluide en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$ (premier cas)	45
3.8	Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-fluide sur le plan complexe (premier cas)	46
3.9	Norme des coefficients de la série de Fourier en fonction de leur ordre	47
3.10	Norme de $R\text{Fourier}_{10}(\theta) - R(\theta)$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$	48
3.11	Norme de $R\text{Fourier}_{10}(\theta) - R(\theta)$ en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$	48
3.12	Source ponctuelle à proximité de l'interface	50
3.13	Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 10$	50
3.14	Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 20$	51
3.15	Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 50$	51
3.16	Superposition des courbes obtenues par intégration et par estimation de la série	53
3.17	Pourcentage de l'erreur relative entre les deux calculs	53
3.18	Réflexion de l'interface plane fluide-fluide	54
3.19	Partie réelle du coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (second cas)	55

3.20	<i>Partie imaginaire du coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (second cas)</i>	55
3.21	<i>Norme du coefficient de réflexion fluide-fluide en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$ (second cas)</i>	56
3.22	<i>Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-fluide sur le plan complexe (second cas)</i>	57
3.23	<i>Norme des coefficients de la série de Fourier en fonction de leur ordre</i>	58
3.24	<i>Norme de $R\text{Fourier}_{10}(\theta) - R(\theta)$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$</i>	59
3.25	<i>Norme de $R\text{Fourier}_{10}(\theta) - R(\theta)$ en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$</i>	59
3.26	<i>Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 10$</i>	60
3.27	<i>Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 20$</i>	61
3.28	<i>Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 50$</i>	61
3.29	<i>Superposition des courbes obtenues par intégration (trait continu) et par estimation de la série (trait discontinu)</i>	62
3.30	<i>Pourcentage de l'erreur relative entre les deux calculs</i>	63
3.31	<i>Partie réelle du coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (second cas avec absorption)</i>	64
3.32	<i>Partie imaginaire du coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (second cas avec absorption)</i>	64
3.33	<i>Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-fluide sur le plan complexe (second cas avec absorption)</i>	65
3.34	<i>Norme des coefficients de la série de Fourier en fonction de leur ordre avec absorption (trait continu) et sans absorption (trait discontinu)</i>	66
3.35	<i>Norme de $R\text{Fourier}_{10}(\theta) - R(\theta)$ en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$ avec absorption (trait continu) et sans absorption (trait discontinu)</i>	67
3.36	<i>Pourcentage de l'erreur relative entre les deux calculs avec absorption (trait continu) et sans absorption (trait discontinu)</i>	68
3.37	<i>Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-solide sur le plan complexe</i>	69
3.38	<i>Norme des coefficients de la série de Fourier en fonction de leur ordre</i>	70
3.39	<i>Contour de Sommerfeld d'intégration numérique en tenant compte de la présence de pôles</i>	71
3.40	<i>Superposition des courbes obtenues par intégration (trait continu) et par estimation de la série (trait discontinu)</i>	71
4.1	<i>Vue générale de la configuration harmonique</i>	75
4.2	<i>Différents parcours envisagés pour le calcul de rayons</i>	76
4.3	<i>Amplitude du champ acoustique perçu par un observateur situé entre l'interface plane et le cylindre (approximation par un calcul de rayons)</i>	79
4.4	<i>Phase du champ acoustique perçu par un observateur situé entre l'interface plane et le cylindre (approximation par un calcul de rayons)</i>	79
4.5	<i>Amplitude du champ acoustique entre l'interface plane et le cylindre : théorie de rayon (trait discontinu) et méthode des images généralisée (trait continu)</i>	81
4.6	<i>Phase du champ acoustique entre l'interface plane et le cylindre : théorie de rayons (trait discontinu) et méthode des images généralisée (trait continu)</i>	81
4.7	<i>Vue générale de la configuration de l'analyse temporelle</i>	82
4.8	<i>Norme du rapport champ acoustique total sur incident au point d'observation</i>	83
4.9	<i>Résultat de la transformée de Fourier inverse</i>	83
4.10	<i>Deux principales composantes</i>	84

4.11	<i>Zoom de la figure 4.9</i>	85
4.12	<i>Deux autres composantes</i>	85
4.13	<i>Configuration du tube à proximité de l'interface plane</i>	87
4.14	<i>Cartographie de la norme du champ acoustique autour du tube</i>	88
5.1	<i>Vue générale d'un cylindre enfoui</i>	91
5.2	<i>Retour à une configuration traitée par la méthode des images généralisée</i>	92
5.3	<i>Interprétation physique des angles $\bar{\theta}$ et $\bar{\theta}^e$</i>	95
5.4	<i>Schéma représentant la zone cartographiée par la figure 5.5</i>	98
5.5	<i>Cartographie de la norme du champ acoustique dans l'eau au dessus du cylindre enfoui</i>	99
5.6	<i>Schéma indiquant la position de l'observateur fixe</i>	100
5.7	<i>Norme du champ acoustique total reçu par l'observateur en fonction du produit ka</i>	101
5.8	<i>Norme du champ acoustique diffusé par le cylindre enfoui en fonction du produit ka</i>	102
5.9	<i>Extraction de la norme du champ acoustique diffusé lié à la nature résonnante du cylindre enfoui en fonction du produit ka</i>	103
6.1	<i>Coordonnées polaires du contour d'un cylindre</i>	105
6.2	<i>Configuration cylindrique n'entrant pas dans le cadre de notre étude</i>	106
6.3	<i>Vue en coupe du cylindre à section elliptique</i>	117
6.4	<i>Cartographie de la norme du champ acoustique dans l'eau au dessus d'un cylindre à section elliptique</i>	118
A.1	<i>Pôles de la fonction $R(\theta)$ fluide-fluide</i>	123
A.2	<i>Points de branchements de la fonction $R(\theta)$ fluide-fluide dans le premier cas</i>	124
A.3	<i>Points de branchements de la fonction $R(\theta)$ fluide-fluide dans le second cas</i>	124
C.1	<i>Premier parcours de rayon</i>	127
C.2	<i>Deuxième parcours de rayon</i>	128
C.3	<i>Parcours équivalent à celui de la figure C.2</i>	129
C.4	<i>Troisième parcours de rayon</i>	130
C.5	<i>Parcours équivalent à celui de la figure C.4</i>	131
C.6	<i>Figure schématique du parcours C.5</i>	132
C.7	<i>Figure schématique avec les projections</i>	133
D.1	<i>Contour C associé à la transformation de Sommerfeld-Watson</i>	136
D.2	<i>Diffusion par un cylindre d'une onde plane</i>	137
D.3	<i>Contour C_0 englobant tous les pôles physiques</i>	138
D.4	<i>Décomposition du contour C_0 en deux sous contours C_1 et C_2</i>	139

Introduction générale

Un modèle physique ne se construit pas seulement en fonction du phénomène qu'il est sensé décrire. Dans une large mesure, le choix d'un modèle dépend des objectifs poursuivis. Et, en réalité, le choix du modèle s'effectue bien souvent selon une multitude de critères contradictoires : cohérence, simplicité, rapidité numérique, pertinence heuristique, fiabilité, domaine d'application etc..

Parmi les nombreuses modélisations possibles, la théorie modale constitue l'un des formalismes mathématiques les plus remarquables. D'une façon générale, son caractère algébrique en fait un formidable outil pour l'implémentation numérique. En effet, la plupart des méthodes algébriques classiques ont fait l'objet de développements algorithmiques optimisés et efficaces. De plus, les résultats numériques qui en découlent sont souvent d'une grande précision. En outre, l'adéquation de la théorie modale au calcul numérique s'accompagne d'une grande simplicité tant formelle que conceptuelle.

Toutefois, l'attrait le plus notable de la théorie modale réside dans son potentiel à générer des recherches créatives et fondamentales pour la compréhension des phénomènes physiques. L'un des exemples les plus frappants fut le travail de G.N. Watson sur la propagation des ondes électromagnétiques publié en 1918 [Wats18a, Wats18b], qui marqua le début de la théorie de Sommerfeld-Watson moderne, théorie qui établit le lien entre la théorie modale et la théorie des rayons.

Dans le domaine de l'acoustique, la théorie modale joue également un rôle particulier dans la compréhension de la diffusion, voir [Der79]. A cet égard, on peut citer les nombreuses contributions dans les années 60 de H. Überall et de ses collaborateurs sur l'utilisation de la transformée de Sommerfeld-Watson en diffusion acoustique, voir [Bri70, Bri71, Dic76, Doo68, Fri75, Fri76, Neu69]. Ces travaux ont permis de mieux comprendre le lien entre l'apparition d'ondes de surface et la diffusion acoustique.

Toujours dans le domaine de l'acoustique, on peut rappeler que la théorie de la matrice \mathbf{S} qui découle d'un formalisme modale, constitue un autre instrument essentiel de l'analyse des résonances en diffusion acoustique. Apparue comme un outil mathématique formel dans les théories quantiques [Whe37], la théorie de la matrice \mathbf{S} a été réintroduite en acoustique classique dans les années 70-80, voir [Fla78], et a connu depuis un développement extraordinaire en acoustique.

Néanmoins, si le formalisme modal présente des atouts très importants pour la modélisation physique, il possède aussi des lacunes. La plus sévère de ces lacunes concerne les restrictions du domaine d'application. Plus précisément, s'il est clair que la théorie modale s'adapte très bien à un petit nombre de géométries particulières dites séparables, il est beaucoup plus difficile de l'appliquer à des configurations sortant de ce cadre strict. Les situations faisant intervenir un objet isolé à géométrie non-séparable, ou une combinaison de plusieurs objets, ne peuvent bénéficier, que très rarement de l'apport d'une modélisation modale.

Certaines configurations comme celles liées à la diffusion par deux sphères ou deux cylindres à sections circulaires ont déjà fait l'objet de travaux qui ont montré que la théorie modale pouvait

être utilisée avec succès, voir [Khe95, Pet74, Pet75, Twe52a, Twe52b, You75]. De même, on peut citer des travaux sur la diffusion par des réseaux infinis, comme ceux de G. Dumery par exemple [Dum65, Dum67, Dum84] ou comme ceux issus d'articles plus récents [Abb95].

Il reste pourtant vrai que la modélisation modale des configurations complexes demeure, en majeure partie, un problème ouvert. Cette problématique de recherche a défini l'esprit général dans lequel se situe notre démarche scientifique. Nous avons ainsi cherché une modélisation modale à la diffusion par un cylindre à proximité d'une interface plane. La configuration cylindre-plan constitue un système complexe qui combine deux géométries de natures très différentes : géométrie cylindrique et géométrie cartésienne. Dans ce cas de figure, la modélisation par un formalisme modal devient nullement évidente, et soulève des difficultés que nous nous proposons de traiter.

Le problème de la diffusion par un cylindre à proximité d'une interface plane a déjà été abordé par plusieurs équipes qui ont utilisé une modélisation de type éléments finis, méthodes intégrales ou méthodes numériques mixtes, voir [Bos80a, Bos80b, Chu95, Faw96a, Faw96b, Hac88, Kri78, San81a, Sar94, San81b]. Les travaux se situant dans le cadre stricte d'une modélisation modale sont fort rares. Il faut toutefois citer les travaux de G. C. Gaunaud et de son équipe qui a traité la diffusion par des formes sphériques à proximité d'une interface plane, voir [Gau94, Gau95, Hua95].

Pour surmonter la difficulté liée à la confrontation des deux géométries, G. C. Gaunaud a utilisé une astuce dite «la méthode des images» qui permet de substituer une configuration cylindre-cylindre à une configuration cylindre-plan. Hélas, la méthode des images impose que l'interface soit rigide ou molle. Ces deux types d'interfaces sont des cas limites théoriques, ce qui restreint considérablement l'intérêt d'une telle méthode pour la modélisation physique.

Le travail proposé dans cette thèse a eu pour objectif de lever cette contrainte et d'essayer de traiter la configuration cylindre-interface plane la plus générale possible. Nous nous sommes attachés à généraliser les méthodes existantes, mais également à préciser les nouvelles contraintes imposées par ces méthodes généralisées.

En traitant le cas de la diffusion par un cylindre enfoui dans un milieu fluide, nous avons cherché à montrer que les nouveaux modèles théoriques ainsi obtenus, permettaient de traiter des situations physiques concrètes.

Chapitre 1

Diffusion par un cylindre en champ libre

Introduction

Le but premier de ce chapitre est d'introduire un formalisme mathématique permettant de modéliser simplement la diffusion par des structures géométriques plus ou moins complexes, regroupées sous le terme générique de «cylindre». En théorie modale, les représentations des champs sous forme de séries explicites sont les plus utilisées. Or, si cette formulation convient parfaitement à l'analyse de la diffusion par un objet isolé, celle-ci devient inefficace, dans le cas d'association de plusieurs objets, pour décrire des interactions mutuelles. Les lourdeurs de calcul des coefficients des séries rendraient, alors, toute interprétation physique des formules absconces et masqueraient la généralité du propos. C'est pourquoi, une représentation plus algébrique, fondée sur des notions simples de vecteur, d'opérateur linéaire et de produit scalaire, a été choisie. En particulier, nous chercherons, d'un point de vue formel, à considérer le cylindre comme un opérateur linéaire liant l'onde diffusée à l'onde incidente.

Dans une première partie, après avoir défini la géométrie du problème physique, nous montrerons, en effet, que la modélisation par un opérateur linéaire d'un objet cylindrique, quel qu'en soit sa nature, est parfaitement justifiée au regard des formes les plus générales de l'onde incidente et de l'onde diffusée.

Dans une seconde partie, nous expliciterons cet opérateur dans le cas bien connu du tube à section circulaire. Un exemple numérique sera développé et servira de référence dans les chapitres suivants.

1.1 Notations et formalisme mathématique

Dans un premier temps, nous allons préciser le cadre de l'étude. Nous imposerons ainsi quelques conditions géométriques dans la configuration du système. Puis, au sein de ce cadre d'étude, nous définirons un formalisme mathématique et nous montrerons qu'il couvre de façon exhaustive l'ensemble des cas envisagés.

1.1.1 Géométrie du problème

En préambule, il est nécessaire de préciser que le terme de cylindre ne doit pas être pris dans son acception la plus restrictive. Par exemple, aucune supposition n'est faite, a priori, sur le nombre d'interfaces. Un tube, qui en possède déjà deux, peut lui-même contenir un cylindre plein ou un autre tube de diamètre plus petit. Il n'est pas non plus précisé que la section doit être circulaire. Enfin, toutes les matières usuelles peuvent constituer le corps du diffuseur. Un cylindre se définit comme un objet invariant par translation suivant un axe et dont l'écartement par rapport à cet axe est borné. Cette définition impose que le dit cylindre doit être infiniment long dans cette direction.

Le diffuseur, soumis à une onde acoustique incidente, est placé dans un milieu fluide illimité. La diffusion acoustique respecte donc les conditions de champ libre. Enfin, il reste à préciser une condition restrictive posée quant à la géométrie de l'onde incidente. Elle doit, en effet, posséder la propriété d'invariance par translation selon l'axe du cylindre. Concrètement, n'entre pas dans le cadre de cette étude l'incidence oblique et, le plus souvent, l'onde incidente sera une onde plane se propageant perpendiculairement à l'axe du cylindre.

Ces hypothèses permettent de réduire le problème à deux dimensions, de sorte qu'une vue en coupe par un plan perpendiculaire à l'axe, comme sur la figure 1.1, est parfaitement représentative de la géométrie du dispositif. Le système de coordonnées choisi sera le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) car il convient naturellement à la géométrie de tous les cylindres et, en

posant l'axe Oz confondu avec l'axe du cylindre, il permet d'effectuer l'ensemble des calculs dans le plan .

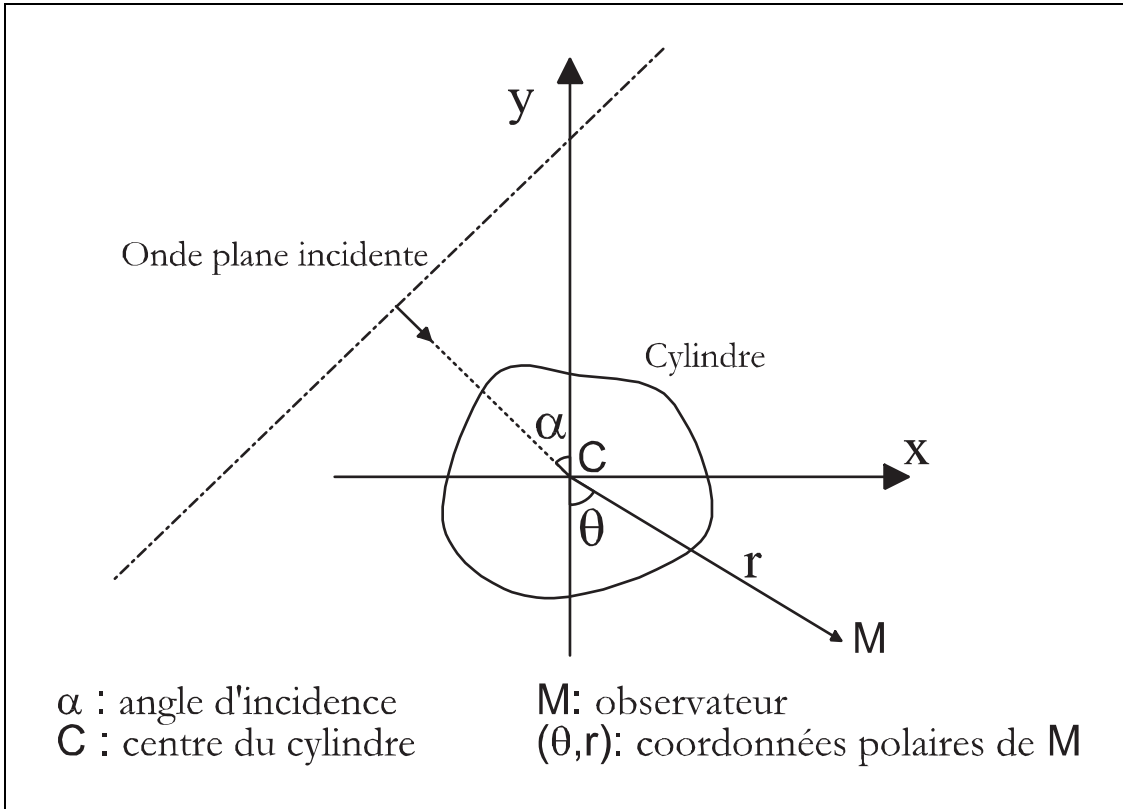


FIG. 1.1 – Vue en coupe du cylindre

1.1.2 Expression des ondes incidentes et diffusées

Quelque soit la diversité de la géométrie et de la nature du cylindre, son influence se résume, pour un observateur extérieur au cylindre, au lien qui existe entre l'onde incidente et l'onde diffusée par ce cylindre. Notre but, ici, est d'explicitement clairement ce lien. Pour cela, nous allons chercher à exprimer les ondes incidentes et diffusées sous forme de séries modales, dite séries de Rayleigh. Ensuite, nous introduirons un formalisme algébrique où le lien entre l'onde incidente et l'onde diffusée se réduira à la définition d'un opérateur linéaire.

Dans un fluide, la grandeur physique directement mesurable est la surpression \mathbf{p} que subissent les particules par rapport à leur état en l'absence de perturbation. Par la suite, nous utiliserons abusivement le terme de pression pour parler de la grandeur \mathbf{p} . Nous supposons, d'une manière classique, la monochromaticité de l'onde incidente et donc par continuité temporelle de toutes les ondes présentes dans le système étudié. Une analyse de Fourier nous permettrait de revenir au cas d'une onde incidente quelconque. Dans ces conditions, les ondes de pression vérifient l'équation dite de Helmholtz 1.1.

$$(\Delta + k^2) \cdot \mathbf{p}(\vec{r}, \omega) = 0, \quad (1.1)$$

Δ étant l'opérateur différentiel laplacien.

(\vec{r}, ω) sont d'une part la position de l'observateur et d'autre part la pulsation de l'onde incidente. \mathbf{p} est le champ de pression harmonique indépendant du temps et k le module du vecteur d'onde qui vaut ω/c (c est la célérité de l'onde dans le fluide). L'expression complète d'une onde de pression est donc $\mathbf{p}(\vec{r}, \omega, t) = \mathbf{p}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$. Le facteur $e^{-i\omega t}$, toujours présent en théorie, sera conventionnellement omis dans la suite du problème par souci d'allègement d'écriture et le champ de pression harmonique se substituera au champ de pression.

L'équation de Helmholtz 1.1 s'exprime en coordonnées cylindriques (r, θ, z) de la façon suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{p} = 0 . \quad (1.2)$$

L'équation de Helmholtz est une équation différentielle linéaire. Les solutions recherchées doivent être physiquement acceptables, c'est à dire avoir un minimum de régularité. Enfin, les conditions aux frontières découlent également de la physique linéaire. Il est, alors, démontré que la solution physique peut être obtenue par la méthode de séparation de variables, et le champ de pression s'exprimera sous la forme :

$$\mathbf{p}(r, \theta, z) = \mathbf{R}(r) \Theta(\theta) \mathbf{Z}(z) . \quad (1.3)$$

Par substitution dans l'équation 1.2 on obtient :

$$\frac{1}{r\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\mathbf{Z}} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial z^2} + k^2 = 0 . \quad (1.4)$$

Dans la géométrie envisagée par cette étude, le cylindre est infiniment long et par symétrie les grandeurs physiques sont indépendantes de la coordonnées z . La fonction Θ doit également être 2π périodique. Dans ce cas, on peut montrer aisément qu'une base de solutions est donnée par les fonctions :

$$J_n(kr) e^{in\theta} \quad \text{et} \quad N_n(kr) e^{in\theta} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z} . \quad (1.5)$$

$J_n(kr)$ et $N_n(kr)$ sont respectivement les fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre n et d'argument kr .

L'onde incidente est produite par des sources externes au cylindre et n'a donc aucune raison d'être discontinue en $r = 0$ comme peut l'être la fonction de Neumann. Par conséquent, elle pourra toujours s'exprimer sur la base des seules fonctions $J_n(kr)$:

$$\mathbf{p}_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n J_n(kr) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \Psi_n^{(j)} , \quad (1.6)$$

en posant $J_n(kr) e^{in\theta} = \Psi_n^{(j)}$.

Par exemple, une onde plane monochromatique unitaire s'écrit dans le repère cylindrique (r, θ, z) (voir figure 1.1) de la façon suivante :

$$\mathbf{p}_{inc} = e^{i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}} \quad (1.7a)$$

$$= e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} , \quad (1.7b)$$

où α est l'angle d'incidence de l'onde plane.

En effectuant un développement en série de Fourier de la fonction $x \rightarrow e^{kr \cos x}$, cette onde plane incidente s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{p}_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\alpha} J_n(kr) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \Psi_n^{(j)}, \quad (1.8)$$

avec $a_n = i^n e^{-in\alpha}$.

D'une façon générale, la décomposition en séries d'ondes cylindriques liées au cylindre permet de définir deux vecteurs :

$$\vec{\Psi}^{(j)} = \left(\Psi_n^{(j)} \right) \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{a}} = (a_n). \quad (1.9)$$

La relation 1.8 peut alors s'écrire d'une façon beaucoup plus synthétique sous un formalisme habituel en diffusion et notamment en diffusion des particules :

$$\mathbf{p}_{inc} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^{(j)} \right\rangle. \quad (1.10)$$

Le symbole \langle , \rangle désigne simplement le produit scalaire canonique. La nature de l'onde incidente est contenue dans les coefficients a_n . Les écritures des équations 1.8 et 1.10 sont mathématiquement équivalentes. Toutefois, le produit scalaire permet de dissocier les caractéristiques de l'onde, le vecteur $\vec{\mathbf{a}}$, de la géométrie générale du problème, le vecteur $\vec{\Psi}$. Si le problème de la diffusion devait prévoir de multiples formes d'ondes incidentes, seule la valeur des coefficients de $\vec{\mathbf{a}}$ serait modifiée sans que la physionomie de la relation 1.10 s'en trouve changée.

La base de solution des ondes cylindriques proposée en 1.5 n'est évidemment pas la seule possible. Par exemple, nous pouvons utiliser les fonctions indépendantes de Hankel de première et de deuxième espèce d'ordre n définies respectivement par :

$$H_n^1(x) = J_n(x) + iN_n(x), \quad (1.11a)$$

$$H_n^2(x) = J_n(x) - iN_n(x), \quad (1.11b)$$

et, ainsi, décomposer toute onde cylindrique sur la base de solution, donnée par les éléments :

$$H_n^1(kr) e^{in\theta} \quad \text{et} \quad H_n^2(kr) e^{in\theta} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.12)$$

Pour kr grand, les relations asymptotiques suivantes sont classiquement connues :

$$H_n^1(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - (2n+1)\frac{\pi}{4})}, \quad (1.13a)$$

$$H_n^2(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - (2n+1)\frac{\pi}{4})}. \quad (1.13b)$$

Il est alors clair que la fonction de Hankel de première espèce tend, pour kr grand vers l'expression d'une onde plane se propageant dans la direction du vecteur \vec{r} et dans la direction $-\vec{r}$ pour la fonction de Hankel de deuxième espèce. Physiquement, les éléments $\{H_n^1(kr) e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$ correspondent aux ondes cylindriques émergentes et $\{H_n^2(kr) e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$ aux ondes convergentes.

L'onde diffusée par le cylindre s'exprimera nécessairement sur la base des ondes émergentes, et on posera :

$$H_n^1(kr) e^{in\theta} = \Psi_n . \quad (1.14)$$

A l'image des notations 1.9, on définit le vecteur :

$$\vec{\Psi} = (\Psi_n) . \quad (1.15)$$

Sachant, par hypothèse dans cette étude, que l'onde diffusée dépend linéairement de l'onde incidente, il est permis de définir un opérateur linéaire \mathbf{T} , appelé parfois matrice de transition dans la «Théorie de la Diffusion Résonnante» (en anglais : *Resonance Scattering Theory*), et d'exprimer, en toute généralité, la pression diffusée sous la forme :

$$\mathbf{p}_{dif} = \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle . \quad (1.16)$$

L'opérateur \mathbf{T} peut également se définir comme étant un opérateur appliqué au vecteur $\vec{\mathbf{a}}$. Le lien entre les deux définitions est simple :

$$\mathbf{p}_{dif} = \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle = \langle \mathbf{T}^* \cdot \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi} \rangle , \quad (1.17)$$

où \mathbf{T}^* est l'adjoint de l'opérateur \mathbf{T} . En dimension finie, la matrice représentant \mathbf{T}^* est la matrice transposée de celle représentant l'opérateur \mathbf{T} . La définition, adoptée dans cette étude, répond au souci d'isoler dans les raisonnements la nature de l'onde incidente.

L'expression 1.16 est en réalité la notation synthétique d'une série modale. Mais contrairement à l'écriture directe sous forme de série, cette relation permet de caractériser le cylindre indépendamment de l'onde incidente.

De même, le diffuseur cylindrique, aussi complexe soit-il, n'interviendra dans la suite des développements théoriques que par le biais de cet opérateur \mathbf{T} , qui sera supposé explicitement connu.

Si l'opérateur \mathbf{T} peut sembler très formel, il n'est pas, comme en mécanique quantique, un opérateur abstrait. Nous allons montrer, dans la partie suivante, comment il est possible de déterminer les coefficients de cet opérateur dans le cas concret d'un tube élastique.

1.2 Le tube élastique

Si du point de vue théorique aucune restriction n'est faite sur la nature du diffuseur, en pratique, les géométries simples forment les modèles les plus répandus. Le modèle du tube élastique à section circulaire, considéré comme infiniment long, en est la parfaite illustration. Il a fait l'objet de nombreuses études tant théoriques qu'expérimentales, et son comportement résonnant est très bien connu. Il constitue un exemple logique de «cylindre», et servira de référence dans les chapitres suivants. En particulier, nous pourrons comparer la diffusion par un tube à proximité d'une interface à la diffusion classique obtenue en champ libre. Afin de mener à bien cette comparaison, il est impératif de déterminer explicitement son opérateur linéaire \mathbf{T} .

1.2.1 Détermination de l'opérateur \mathbf{T} du tube élastique

Le tube est immergé dans un premier milieu fluide caractérisé par une densité ρ_1 et une célérité c_1 . Le deuxième milieu compose le corps du tube et est constitué par un matériau élastique. La densité est notée ρ_2 , la vitesse de l'onde longitudinale c_L et la vitesse de l'onde transversale c_T . Le troisième milieu, interne au tube, est un fluide de densité ρ_3 et de célérité c_3 . On note a et b la valeur du rayon, respectivement externe et interne, comme représenté sur la figure 1.2.

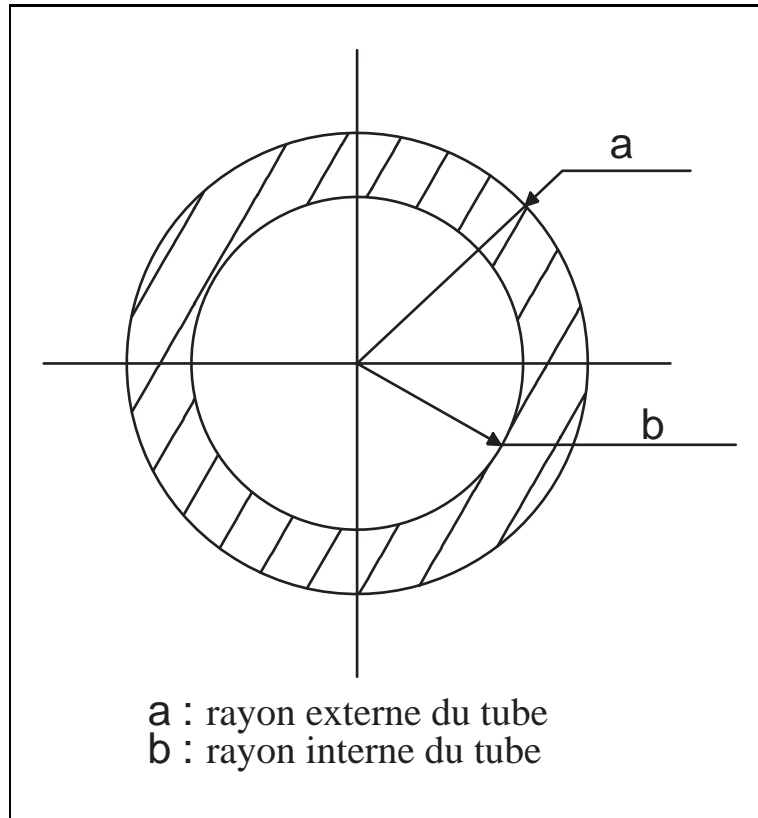


FIG. 1.2 – Vue en coupe du tube

L'onde dans le fluide externe

Afin de déterminer l'opérateur \mathbf{T} , nous chercherons à déterminer la diffusion par le cylindre quand l'onde incidente est choisie égale à l'onde élémentaire :

$$\mathbf{p}_{inc} = J_{n_0}(k_1 r) e^{in_0 \theta} = \Psi_{n_0}^{(j)}, \quad (1.18)$$

où k_1 vaut ω/c_1 .

Le champ de pression total \mathbf{p}_1 dans le fluide externe sera donc :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif} = J_{n_0}(k_1 r) e^{in_0 \theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n H_n^1(k_1 r) e^{in \theta}, \quad (1.19)$$

avec $\forall n, b_n \in \mathbb{C}$.

Si l'expression 1.19 nous donne la forme générale du champ de pression, l'inconnue b_n restera à déterminer. Les conditions physiques imposées aux limites permettent de constituer un système Cramerien et d'en déduire les inconnues du problème. Certaines conditions aux limites portant sur le déplacement, il est nécessaire d'exprimer le déplacement relatif $\vec{\mathbf{u}}_1$ des particules causé par la surpression \mathbf{p}_1 .

Dans un fluide, la pression \mathbf{p}_1 peut s'exprimer à partir d'un potentiel scalaire Φ_1 :

$$\mathbf{p}_1 = \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Il est également possible d'établir la relation entre le déplacement relatif $\vec{\mathbf{u}}_1$ et l'onde de pression :

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla}(\Phi_1) , \quad (1.21)$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur différentiel gradient.

En particulier, le calcul du déplacement radial des particules du fluide externe donne, d'après les relations précédentes :

$$\mathbf{u}_{1,r} = \frac{k_1}{\rho_1 \omega^2} \left\{ J'_{n_0}(k_1 r) e^{in_0 \theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n H_n^{(1)}(k_1 r) e^{in\theta} \right\} , \quad (1.22)$$

où le signe ' indique la dérivation par rapport à l'argument.

Dans le milieu solide et le fluide interne du tube, il faudra également déterminer le déplacement relatif radial pour exprimer de façon complète les conditions aux limites.

L'onde dans le solide

Dans le milieu élastique solide, le déplacement $\vec{\mathbf{u}}_2$ dépend d'un potentiel scalaire Φ_2 correspondant au déplacement longitudinal et d'un potentiel vecteur $\vec{\Gamma}_2$ correspondant au déplacement transversal :

$$\vec{\mathbf{u}}_2 = -\vec{\nabla}(\Phi_2) + \vec{\nabla} \wedge \vec{\Gamma}_2 , \quad (1.23)$$

où $\vec{\nabla} \wedge$ est l'opérateur différentiel rotationnel.

Le déplacement dans la direction Oz étant considéré nul par hypothèse, seule la composante axiale $\Gamma_{2,z}$ est non nulle :

$$\Gamma_{2,r} = \Gamma_{2,\theta} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{2,r} \\ \Gamma_{2,\theta} \\ \Gamma_{2,z} \end{pmatrix} . \quad (1.24)$$

Les potentiels vérifient l'équation de Helmholtz et peuvent s'écrire d'une façon générale :

$$\Phi_2 = \frac{1}{\rho_2 \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_n(k_L r) e^{in\theta} + d_n N_n(k_L r) e^{in\theta} , \quad (1.25a)$$

$$\Gamma_{2,z} = \frac{1}{\rho_2 \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_n J_n(k_T r) e^{in\theta} + f_n N_n(k_T r) e^{in\theta} , \quad (1.25b)$$

où $k_L = \omega/c_L$, $k_T = \omega/c_T$ et $\forall n$, $(c_n, d_n, e_n, f_n) \in \mathbb{C}^4$.

L'onde dans le fluide interne

Dans la cavité, la pression doit être continue en $r = 0$ et doit donc s'exprimer de la façon suivante :

$$\mathbf{p}_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n J_n(k_3 r) e^{in\theta} , \quad (1.26)$$

où $k_3 = \omega/c_3$ et $\forall n, g_n \in \mathbb{C}$.

Comme dans le cas du fluide externe, la pression est directement liée au déplacement $\vec{\mathbf{u}}_3$ dont la composante radiale peut être calculée :

$$\mathbf{u}_{3,r} = \frac{k_3}{\rho_3 \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n J'_n(k_3 r) e^{in\theta} . \quad (1.27)$$

Conditions de continuité aux interfaces

Afin d'expliciter les inconnues $(b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n)$, on utilise les trois conditions de continuité aux interfaces solide-liquide externe et interne, en $r = a$ et en $r = b$:

1. La pression dans le fluide est égale à la composante normale des contraintes dans le solide.
2. Le déplacement radial dans le fluide est égal au déplacement radial dans le solide.
3. Les contraintes tangentielles sont nulles à la surface du solide.

Le tenseur des contraintes dans le solide pouvant s'exprimer à partir des potentiels vecteur et scalaire, on obtient un système d'équations. Il faut aussi noter que les conditions de continuité sont vérifiées quelque soit θ et qu'il est alors possible d'identifier les séries modales, qui sont des séries de Fourier en θ , mode par mode.

On en déduit alors que $\forall n \neq n_0, b_n = c_n = d_n = e_n = f_n = 0$ et que, pour $n = n_0$, les conditions de continuité se résument au système linéaire 6x6 suivant :

$$\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} b_{n_0} \\ c_{n_0} \\ d_{n_0} \\ e_{n_0} \\ f_{n_0} \\ g_{n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_T^2 J_{n_0}(x_1) \\ \frac{\rho_2^2}{\rho_1} J'_{n_0}(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (1.28)$$

où \mathbf{M} est la matrice donnée à la figure 1.3 et où :

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 a, & x_L &= k_L a, & x_L &= k_L a, \\ y_T &= k_T b, & y_T &= k_T b, & y_3 &= k_3 b . \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc}
 x_T^2 H_{n_0}^1(x_1) & (x_T^2 - 2n_0^2) J_{n_0}(x_L) & (x_T^2 - 2n_0^2) N_{n_0} & 2n_0(x_T J_{n_0}'(x_T) - J_{n_0}(x_T)) & 2n_0(x_T N_{n_0}'(x_T) - N_{n_0}(x_T)) & 0 \\
 -\frac{\rho_2}{\rho_1} x_1 H_{n_0}^1(x_1) & -x_L J_{n_0}'(x_L) & -x_L N_{n_0}'(x_L) & x_T J_{n_0}(x_T) & x_T N_{n_0}(x_T) & 0 \\
 0 & 2n_0(x_L J_{n_0}'(x_L) - J_{n_0}(x_L)) & 2n_0(x_L N_{n_0}'(x_L) - N_{n_0}(x_L)) & (x_T^2 - 2n_0^2) J_{n_0}(x_T) + 2x_T J_{n_0}'(x_T) & (x_T^2 - 2n_0^2) N_{n_0}(x_T) + 2x_T N_{n_0}'(x_T) & 0 \\
 0 & (y_T^2 - 2n_0^2) J_{n_0}(y_L) + 2x_L J_{n_0}'(y_L) & (y_T^2 - 2n_0^2) N_{n_0}(y_L) + 2x_L N_{n_0}'(y_L) & 2n_0(y_T J_{n_0}'(y_T) - J_{n_0}(y_T)) & 2n_0(y_T N_{n_0}'(y_T) - N_{n_0}(y_T)) & y_T^2 J_{n_0}(y_3) \\
 0 & -y_L J_{n_0}'(y_L) & -y_L N_{n_0}'(y_L) & y_T J_{n_0}(y_T) & y_T N_{n_0}(y_T) & -\frac{\rho_2}{\rho_3} y_3 J_{n_0}'(y_3) \\
 0 & 2n_0(y_L J_{n_0}'(y_L) - J_{n_0}(y_L)) & 2n_0(y_L N_{n_0}'(y_L) - N_{n_0}(y_L)) & (y_T^2 - 2n_0^2) J_{n_0}(y_T) + 2y_T J_{n_0}'(y_T) & (y_T^2 - 2n_0^2) N_{n_0}(y_T) + 2y_T N_{n_0}'(y_T) & 0
 \end{array} \right)$$

FIG. 1.3 – Matrice \mathbf{M} du système 1.28

La résolution d'un tel système linéaire se conduit par la méthode de Cramer, et ainsi le coefficient b_{n_0} est donné par la relation :

$$b_{n_0} = \frac{D_{n_0}^{(1)}}{D_{n_0}} . \quad (1.29)$$

D_{n_0} est le déterminant de la matrice \mathbf{M} et $D_{n_0}^{(1)}$ le déterminant de \mathbf{M} dont on a remplacé la première colonne par le second membre de l'équation 1.28.

L'onde incidente est l'onde élémentaire $\mathbf{p}_{inc} = \Psi_{n_0}^{(j)}$ et donc la liste des b_n représente la ligne n_0 de l'opérateur \mathbf{T} . Tous ces calculs montrent en définitive que l'opérateur linéaire \mathbf{T} d'un tube élastique est un opérateur diagonal :

$$\forall i \neq j, T_{ij} = 0 \text{ et } T_{ii} = \frac{D_i^{(1)}}{D_i} . \quad (1.30)$$

Le caractère diagonal de l'opérateur \mathbf{T} est une originalité des tubes à section circulaire centrée. Enfin, on peut remarquer que la détermination de l'opérateur linéaire \mathbf{T} pour un tube élastique contenant du vide s'obtient en faisant tendre ρ_3 vers 0. On retrouve que g_n est nul et l'équation 1.28 se réduit alors à un système 5x5 équivalent au précédent.

1.2.2 Application numérique

L'exemple numérique, qui servira de référence tout au long de cette étude, sera celui d'un tube élastique d'intérieur vide.

Les caractéristiques physiques sont en utilisant les notations précédemment établies :

$$a = 0,003572 \text{ m} , \quad \frac{b}{a} = 0,9 , \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_1 &= 1780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho_2 &= 2790 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_L &= 6380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, & c_T &= 3100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Les valeurs ρ_2 , c_L et c_T associées au tube, correspondent, ici, à de l'aluminium. Les valeurs ρ_1 et c_1 correspondent, elles, à un milieu sédimentaire identifié à un fluide parfait.

Ce tube est excité par une onde plane unitaire \mathbf{p}_{inc} sous un angle d'incidence $\alpha = 0$. D'après les notations 1.8, 1.9 et 1.10, nous avons :

$$\mathbf{p}_{inc} = e^{i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}} \quad (1.33a)$$

$$= \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^{(j)} \right\rangle \quad (1.33b)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \Psi_n^{(j)} , \quad (1.33c)$$

avec $a_n = i^n$.

Ainsi, d'après ce que nous avons vu précédemment, l'onde diffusée par le tube \mathbf{p}_{dif} s'exprime par :

$$\mathbf{p}_{dif} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \right\rangle \quad (1.34a)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_{np} \Psi_p , \quad (1.34b)$$

Dans le cas de notre tube, l'opérateur \mathbf{T} est diagonal et $T_{ii} = b_i$. D'où :

$$\mathbf{p}_{dif} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_n \Psi_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n b_n H_n^1(k_1 r) e^{in\theta} . \quad (1.35)$$

En rétrodiffusion, $\theta = \pi$, on a :

$$\mathbf{p}_{dif} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_n \Psi_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n b_n H_n^1(k_1 r) e^{in\pi} \quad (1.36a)$$

et

$$\mathbf{p}_{inc} = e^{-ik_1 \cdot r} . \quad (1.36b)$$

Pour $k_1 r$ grand, la relation asymptotique 1.13a permet d'écrire :

$$\mathbf{p}_{dif} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i(k_1 r - (2n+1)\frac{\pi}{4} + n\theta)} . \quad (1.37)$$

On normalise la pression diffusée par $\sqrt{\frac{a}{2r}}$; puis on prend $r = a$, afin de rendre les expressions indépendantes de l'éloignement de l'observateur :

$$\mathbf{p}_{dif_{norm}} = \frac{2}{\sqrt{\pi k_1 a}} e^{i(k_1 a - \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n b_n e^{in\frac{\pi}{2}} \quad (1.38a)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi k_1 a}} e^{i(k_1 a - \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n b_n . \quad (1.38b)$$

Le rapport $\mathbf{p}_{dif_{norm}}/\mathbf{p}_{inc}$ s'appelle la fonction de forme f_{forme} du cylindre :

$$f_{forme} = \frac{2}{\sqrt{\pi k_1 a}} e^{i(2k_1 a - \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n b_n . \quad (1.39)$$

Dans le cas présent, le module de cette fonction de forme est donné par la figure 1.4. Le paramètre est la fréquence réduite $k_1 a$ et la série 1.38a est tronquée à $|n| \leq [k_1 a] + 10$, $[]$ signifiant la partie entière.

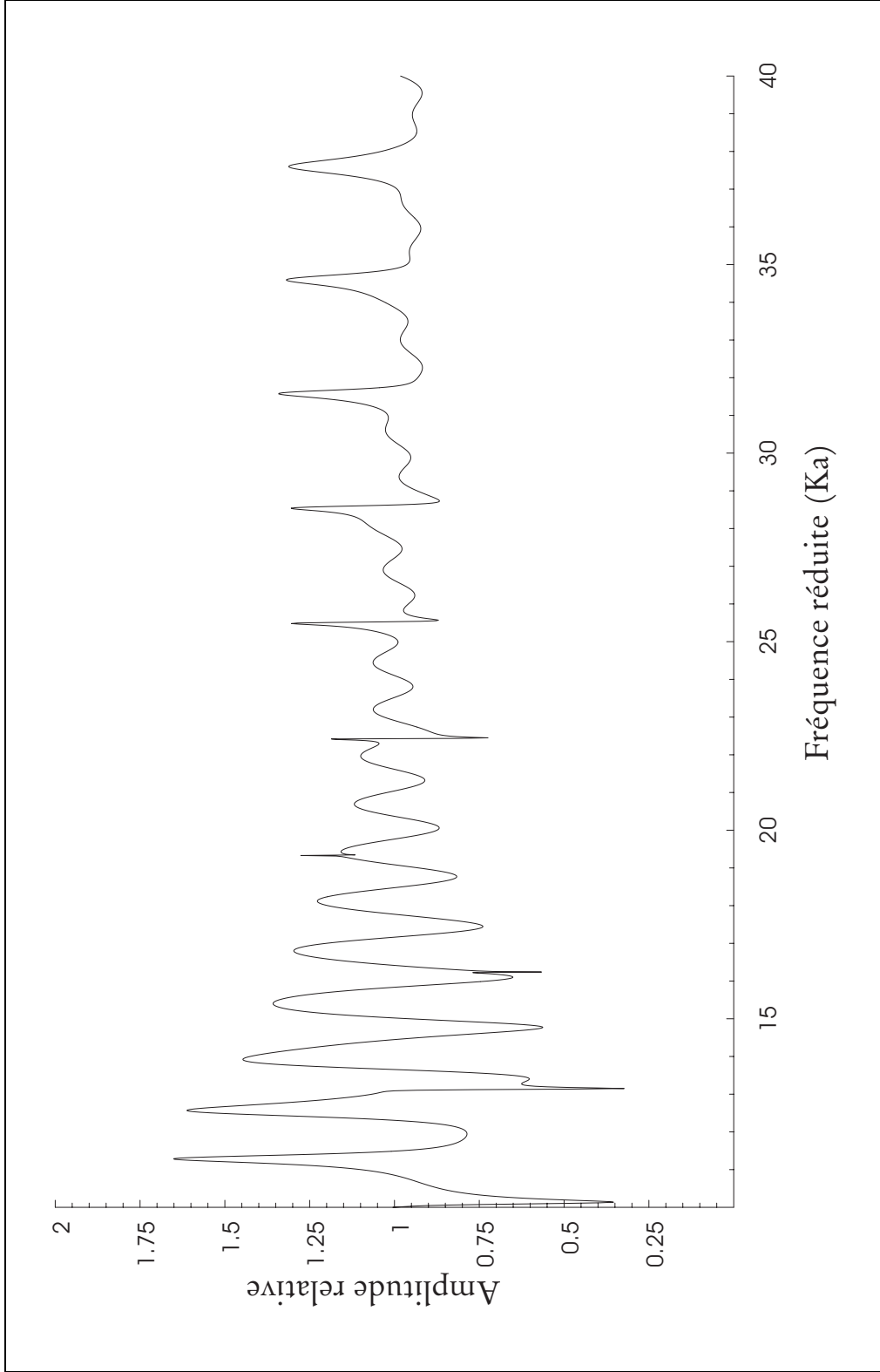


FIG. 1.4 – Norme de la fonction de forme du tube

Chapitre 2

Généralisation de la méthode des images

Introduction

Nous avons vu précédemment que, en ce qui concerne la diffusion par un cylindre, sa connaissance se résume à la donnée de l'opérateur \mathbf{T} .

Nous allons, maintenant, envisager le cas où le cylindre se trouve à proximité d'une interface plane. Intuitivement, on peut penser que le champ de pression est alors le résultat des interactions mutuelles entre les deux diffuseurs. Ce chapitre a pour objet de justifier cette idée et d'identifier clairement ces interactions. Il faut cependant souligner que les «démonstrations» serviront avant tout de support à la compréhension physique des phénomènes. Certains problèmes liés aux domaines de validité ou à l'emploi de transformations non mathématiquement rigoureuses ne seront abordés que dans le chapitre suivant.

Dans une première partie, la disposition géométrique sera précisée. Nous rappellerons également la méthode classique dite «des images» applicable aux seuls cas des interfaces rigides et molles.

La deuxième partie montrera qu'il est possible de généraliser la méthode des images au cas d'une interface quelconque. Cette généralisation sera obtenue grâce à un raisonnement du type «série de Debye généralisé», fondé sur l'analyse des interactions élémentaires. Nous retrouverons d'ailleurs explicitement la construction de la méthode des images dans les cas d'interfaces molles et rigides.

La troisième partie complètera cette présentation méthodologique. Nous établirons ainsi le lien entre une méthode du type «méthode des images généralisée» et les méthodes intégrales classiques par le biais de la fonction de Green. Nous verrons également que les résultats théoriques obtenus lors de la construction de notre méthode peuvent se déduire d'un raisonnement mathématiquement plus direct, mais physiquement plus abstrait. Enfin, la diffusion par un cylindre à l'intérieur d'un guide d'onde plan sera considérée.

2.1 Présentation

2.1.1 Géométrie du problème

La caractérisation du cylindre faite au premier chapitre reste valable ici, et la direction de propagation de l'onde incidente sera toujours perpendiculaire à l'axe du cylindre supposé infini. Nous considérons enfin une interface selon un plan parallèle à l'axe du cylindre. La diffusion par le cylindre proche de l'interface reste donc un problème à deux dimensions, parfaitement décrit par la vue en coupe de la figure 2.1. Dans le plan de coupe, l'origine O du repère cartésien sera la projection perpendiculaire du centre du cylindre sur l'axe délimitant l'interface plane. Les axes Ox et Oy seront respectivement parallèles et perpendiculaires à l'interface. Les coordonnées polaires (r, θ) , quant à elles, resteront attachées au point C , centre du cylindre. L'angle θ sera choisi comme étant l'angle $(-\vec{u}_y, \vec{r})$, où \vec{u}_y est le vecteur unitaire de l'axe Oy . L'observateur se trouve dans le demi-plan contenant le cylindre.

Dans cette configuration géométrique, la méthode classique dite «des images» s'applique à deux cas restrictifs, celui de l'interface molle et celui de l'interface rigide. Nous allons rappeler cette méthode et en dégager des concepts susceptibles d'être généralisés à tous les cas de figure.

2.1.2 La méthode des images

La détermination du champ de pression diffusé peut être considérée mathématiquement comme un problème aux limites de l'équation de Helmholtz. Or, un principe général nous permet

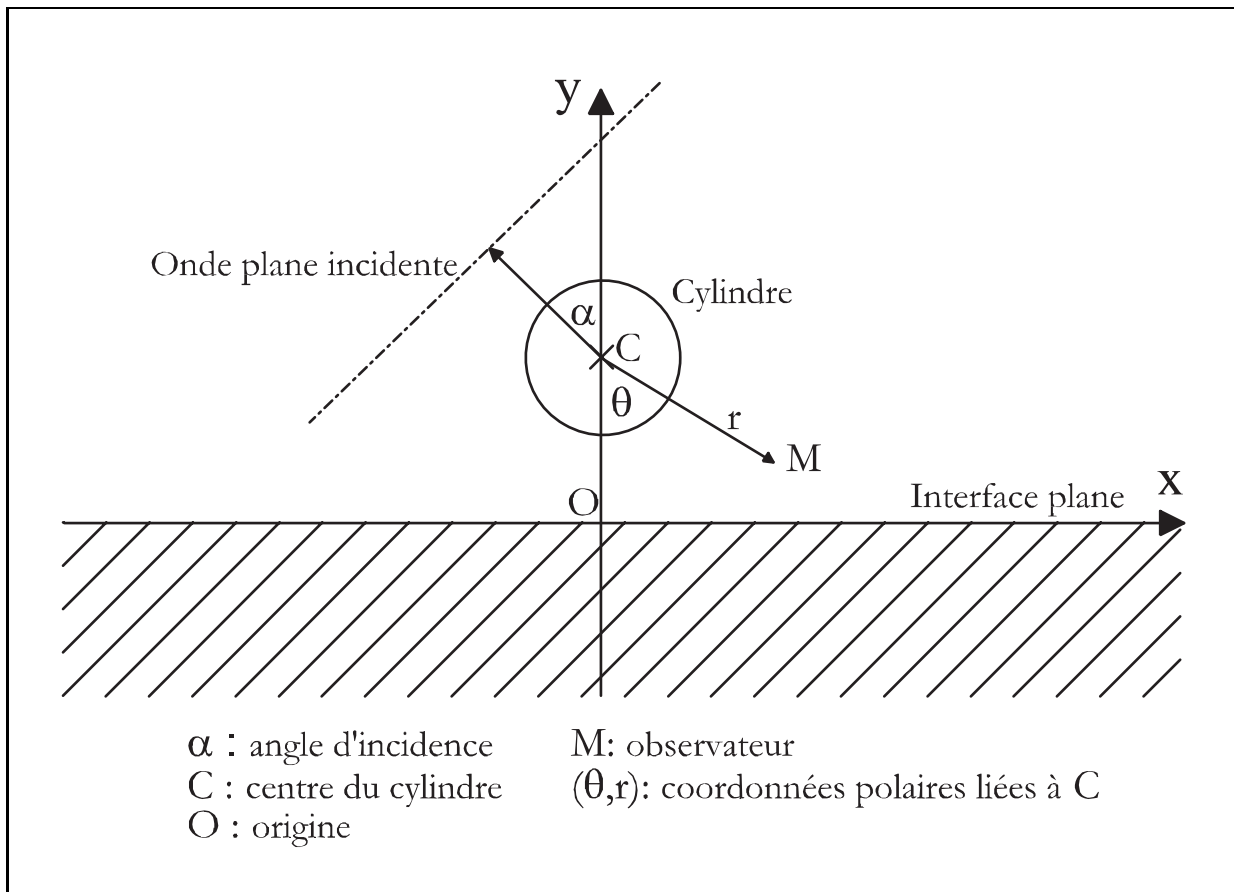


FIG. 2.1 – Vue en coupe du cylindre et de l'interface

de «remplacer» une limite par des sources fictives externes au domaine telles que les conditions à cette frontière soient vérifiées [Bru98]. La méthode des images est l'application directe de ce principe dans le cas où l'une des limites est, comme ici, une interface plane.

L'interface molle

La condition imposée par une interface molle est que la pression totale au niveau de l'interface s'annule. Rappelons que le domaine d'observation est le demi-plan contenant le cylindre mais privé de l'espace occupé par le cylindre. Pour qu'une distribution de sources fictives externes au domaine conduise à vérifier la condition de pression nulle à l'interface, il faut choisir des sources fictives opposées symétriques par rapport au plan de l'interface. Plus précisément, comme le montre la figure 2.2, une première source fictive sera un cylindre symétrique au cylindre réel mais diffusant des ondes cylindriques de signe opposé à celles diffusées par le cylindre réel. La seconde source fictive considérée sera une onde plane symétrique à l'onde plane incidente réelle mais également de signe opposé.

Par la suite, la propriété de symétrie par rapport au plan de l'interface associée à l'opposition du signe de l'onde diffusée sera qualifiée d'antisymétrie.

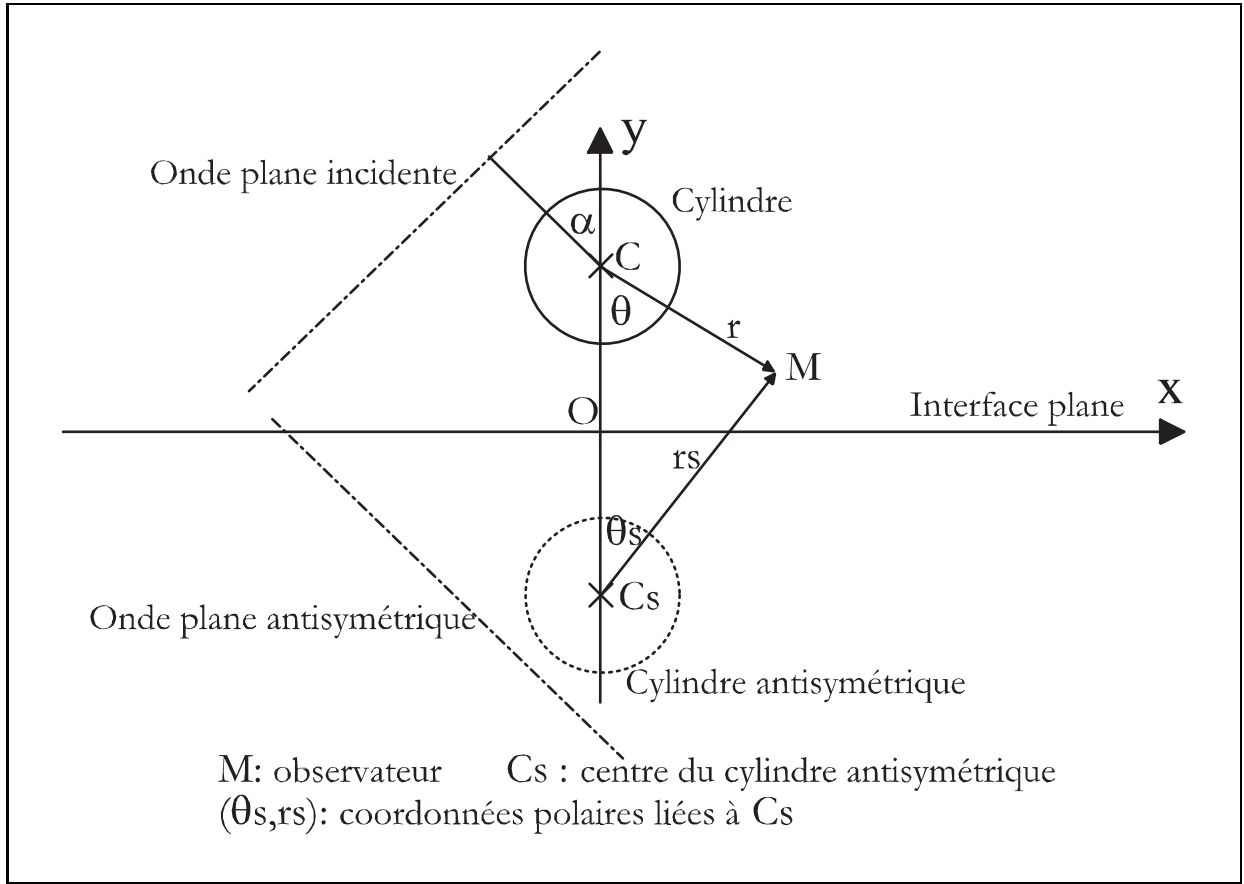


FIG. 2.2 – Vue en coupe du cylindre et de son image symétrique

Si le cylindre diffuse une onde \mathbf{W} de la forme :

$$\mathbf{W} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^1(kr) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \Psi_n, \quad (2.1)$$

alors le cylindre antisymétrique diffusera l'onde W_s :

$$\mathbf{W}_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a_n H_n^1(kr_s) e^{in\theta_s}. \quad (2.2)$$

Conformément à la figure 2.2, (θ, r) et (θ_s, r_s) sont les coordonnées polaires respectivement associées au centre du cylindre C et à son symétrique par rapport à l'interface C_s .

Il est clair que pour un point quelconque de l'interface, les coordonnées polaires correspondantes seront telles que $r_s = r$ et $\theta_s = \theta$. La pression diffusée par les deux cylindres sera donc, en ce point, $\mathbf{W} + \mathbf{W}_s = 0$. De même, la somme des pressions issues des deux ondes incidentes sera nulle en tout point de l'interface.

Le problème du cylindre proche de l'interface s'est transformé en une détermination du champ de pression diffusé par deux cylindres parallèles. L'intérêt de la procédure tient au fait que le calcul de la diffusion par deux cylindres parallèles est connu [Twe52a, Twe52b, Khe95] (de même pour deux éléments sphériques en dimension trois [Gau95, Hua95, San81a, San81b]) et ne soulève

pas de difficultés majeures. D'un point de vue physique, l'onde plane antisymétrique s'interprète comme étant la réflexion de l'onde plane incidente sur l'interface à laquelle il est attribué le coefficient de réflexion -1 , et la diffusion par le cylindre antisymétrique est la contribution de l'interface engendrée par la diffusion issue du cylindre réel.

L'interface rigide

Une interface rigide se caractérise par le fait que le déplacement normal de la paroi est nul. Cela signifie, d'après les relations 1.20 et 1.21, que, dans le repère indiqué figure 2.2, $\forall x, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}(x, y = 0) = 0$.

De la même façon que précédemment, le problème se résout en «remplaçant» l'interface par des sources fictives externes non plus antisymétriques mais symétriques. C'est à dire que l'onde diffusée par une source fictive aura le même signe que celui de l'onde diffusée par la source réelle. Par construction, le champ de pression, ainsi calculé, dans tout le plan offre une propriété de symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Donc $\forall x, y \rightarrow \mathbf{P}(x, y)$ est une fonction paire et nous avons :

$$\forall x, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}(x, y = 0) = 0 . \quad (2.3)$$

Physiquement, l'onde plane symétrique s'interprète encore comme une onde réfléchie avec un coefficient de réflexion associé à l'interface qui vaut 1. La contribution de l'interface associée à la diffusion par le cylindre réel se modélise par la diffusion issue du cylindre fictif symétrique.

Généralisations

Dans les deux cas précédemment traités, le coefficient de réflexion associé à l'interface est directement mis en évidence. Cela laisse à penser qu'une généralisation de la méthode des images doit naturellement utiliser le coefficient de réflexion de l'interface plane. De même que la contribution cylindrique de l'interface plane se modélise par celle d'un cylindre symétrique ou antisymétrique, d'une façon plus générale, les ondes cylindriques issues du point C_s , symétrique du centre du cylindre C par rapport à l'interface, semblent jouer un rôle primordial. Nous chercherons donc par la suite à exprimer la réaction de l'interface sur la base des ondes cylindriques issues de C_s .

Une onde cylindrique \mathbf{W}_s issue de C_s sera de la forme générale :

$$\mathbf{W}_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^1(kr_s) e^{in\theta_s} + b_n H_n^2(kr_s) e^{in\theta_s} . \quad (2.4)$$

Il est également intuitif de penser que si l'onde diffusée par le cylindre réel n'est composée que d'ondes émergentes, alors la contribution de l'interface se compose aussi uniquement d'ondes émergentes, et donc :

$$\mathbf{W}_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^1(kr_s) e^{in\theta_s} . \quad (2.5)$$

Nous poserons à l'image de ce qui a été fait pour les ondes cylindriques diffusées par le cylindre (1.14,1.15,1.16) :

$$\Psi_n^s = H_n^1(kr_s) e^{in\theta_s} , \quad (2.6)$$

et

$$\vec{\Psi}^s = (\Psi_n^s) \quad \vec{\mathbf{a}} = (a_n) . \quad (2.7)$$

L'expression 2.5 peut se réécrire comme :

$$\mathbf{W}_s = \langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^s \rangle . \quad (2.8)$$

Cette formulation nous permet déjà d'avoir une idée générale de la contribution d'une interface quelconque. Nous allons maintenant chercher à aboutir à une théorie générale dans laquelle la méthode des images n'est qu'un cas particulier de cette théorie.

2.2 L'interface quelconque

A présent, aucune hypothèse restrictive n'est faite sur la nature de l'interface plane. Seul le coefficient de réflexion $R(\theta)$, fonction de l'angle d'incidence θ , sera supposé connu. Par la suite, la diffusion par l'interface de l'onde plane incidente, à savoir l'onde plane réfléchie, sera parfaitement déterminée par la connaissance de ce coefficient de réflexion. La difficulté majeure est de déterminer la diffusion par l'interface des ondes cylindriques issues de la diffusion par le cylindre réel.

Une onde issue du cylindre réel engendre une réaction de l'interface plane, qui engendre à son tour une diffusion par le cylindre et ainsi de suite. Il faut donc modéliser l'interaction globale entre le cylindre et le plan. Pour cela, nous allons tout d'abord analyser la réaction directe de l'interface provoquée par une onde cylindrique issue du cylindre réel. Puis nous analyserons la réaction du cylindre excité par une onde issue du plan. Nous en déduirons l'expression de l'interaction élémentaire constituée par un aller et retour entre le cylindre et le plan, et, par sommation, nous essaierons d'obtenir la contribution totale issue du cylindre et de l'interface.

2.2.1 Réaction de l'interface plane

Cette partie a pour but de calculer la diffusion par l'interface plane d'une onde quelconque $\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle$ issue du cylindre réel. Les ondes élémentaires $\Psi_n = H_n^1(kr) e^{in\theta}$ étant à géométrie cylindrique, il n'est pas permis de déterminer directement la réaction de l'interface à l'excitation de ces ondes. Nous devons au préalable représenter Ψ_n sous la forme d'un spectre d'ondes planes.

Spectre d'ondes planes

La mise sous forme d'un spectre d'ondes planes de Ψ_n est rendue possible par l'expression intégrale, dite de Sommerfeld [Som49], de la fonction de Hankel :

$$H_n^1(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{S_0} e^{ikr \cos \omega} e^{in(\omega - \pi/2)} d\omega , \quad (2.9)$$

où S_0 est contour de Sommerfeld.

Les contours de Sommerfeld sont un ensemble de courbes du plan complexe allant du point $M_s + i\infty$, avec $-\pi < M_s < 0$, vers le point $M_f - i\infty$, avec $0 < M_s < +\pi$, comme représentés sur la figure 2.3.

La théorie de Cauchy des intégrales dans le plan complexe [Cha90] permet d'affirmer que, en l'absence de points singuliers à l'intérieur du domaine de parcours, l'expression 2.9 ne dépend pas du contour de Sommerfeld choisi.

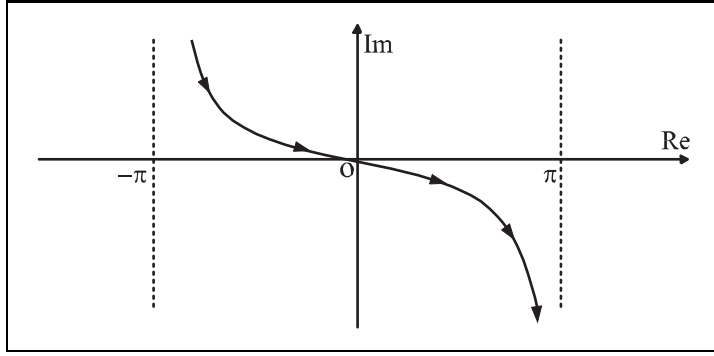


FIG. 2.3 – Contour de Sommerfeld

Afin d'obtenir un spectre d'ondes planes, il faut introduire le changement de variable en θ_k tel que :

$$\omega = \theta_k - \theta . \quad (2.10)$$

La relation 2.9 s'écrit alors :

$$H_n^1(kr) = \frac{1}{\pi} e^{-in\theta} \int_S e^{ikr(\sin\theta \sin\theta_k + \cos\theta \cos\theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k . \quad (2.11)$$

L'angle θ ne variant qu'entre $-\pi$ et π , S_0 peut être choisi de façon à ce que le contour $S = S_0 + \theta$ soit toujours un contour de Sommerfeld.

En notant $(0, y_c)$ les coordonnées du point C , centre du cylindre, dans le repère $OxOy$ et (x, y) les coordonnées du point d'observation, il vient la relation :

$$\Psi_n = H_n^1(kr) e^{in\theta} = \frac{1}{\pi} \int_S e^{ik(x \sin\theta_k - (y-y_c) \cos\theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k . \quad (2.12)$$

D'un point de vue mathématique, le choix du contour de Sommerfeld importe peu, car l'expression 2.12 est indépendante de ce choix. En revanche, d'un point de vue physique, le choix du contour de Sommerfeld particulier formé des intervalles $]-\pi/2 + \infty, -\pi/2]$, $[-\pi/2, \pi/2]$ et $[\pi/2, \pi/2 - \infty]$, comme indiqué sur la figure 2.4, aboutit à une décomposition en ondes planes naturelle, ce qui facilite grandement l'interprétation de l'expression 2.12.

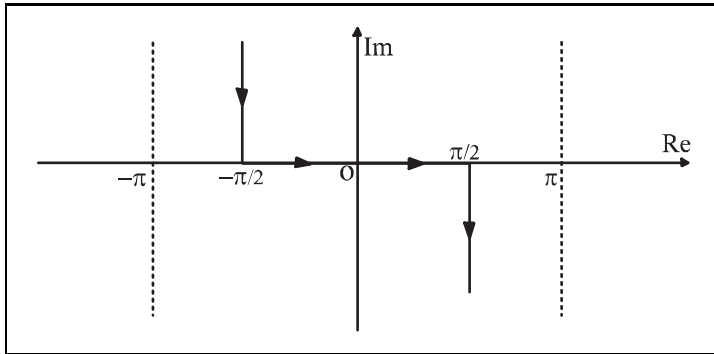


FIG. 2.4 – Un contour de Sommerfeld particulier

En effet, nous obtenons, d'une part, un spectre d'ondes planes homogènes propagatives correspondant à l'intervalle, où l'angle d'incidence θ_k est un réel, et compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. D'autre part, les deux autres intervalles, où la partie réelle de l'angle d'incidence complexe est $-\pi/2$ ou $\pi/2$, correspondent à deux spectres d'ondes évanescentes.

Si cette décomposition est naturelle physiquement, la géométrie du chemin d'intégration, deux segments verticaux et un horizontal, simplifie également considérablement l'intégration numérique.

Réaction directe du plan

Le spectre d'ondes planes ayant été explicité, nous allons considérer que, grâce au principe de superposition, la réaction du plan Ψ_n^r engendrée par Ψ_n est le spectre des ondes planes réfléchies. C'est à dire :

$$\Psi_n^r = \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_c) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k, \quad (2.13)$$

où $R(\theta)$ est le coefficient de réflexion du plan.

La première expression de la réaction élémentaire du plan est ainsi obtenue. Mais, elle reste difficilement exploitable dans le cadre de la théorie modale que nous nous sommes fixés. Notre but est donc, maintenant, d'écrire la relation 2.13 sous forme de modes. Pour cela, nous utilisons la décomposition en série de Fourier du coefficient de réflexion $R(\theta)$:

$$R(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_m e^{im\theta}. \quad (2.14)$$

La relation 2.13 devient alors :

$$\Psi_n^r = \frac{1}{\pi} \int_S \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_m e^{im\theta_k} \right) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_c) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k. \quad (2.15)$$

L'utilisation de la série de Fourier dans le plan complexe sera discutée ultérieurement (voir chapitre 3).

En admettant la validité de la permutation de l'intégrale et du signe somme, nous avons la relation :

$$\Psi_n^r = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_m i^m \left[\frac{1}{\pi} \int_S e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_c) \cos \theta_k)} e^{i(n+m)(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k \right]. \quad (2.16)$$

Compte tenu des notations posées en 2.6 et 2.7, nous pouvons écrire ψ_n^r en fonction des ondes cylindriques élémentaires issues du point symétrique C_s :

$$\Psi_n^r = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_m i^m \Psi_{m+n}^s. \quad (2.17)$$

Par le changement de variable $p = m + n$, nous obtenons finalement :

$$\Psi_n^r = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_{p-n} i^{p-n} \Psi_p^s. \quad (2.18)$$

Nous avons donc simplement exprimé la réaction de l'interface par rapport à une onde élémentaire Ψ_n dans la base des ondes cylindriques émergeant du point symétrique C_s .

Afin de pouvoir exprimer simplement cette réaction dans le cas d'une onde quelconque issue du point C , nous définissons un opérateur linéaire \mathbf{R} , dit de réflexion :

$$\mathbf{R} = (R_{np}) \quad \text{et} \quad R_{np} = i^{p-n} r_{p-n} . \quad (2.19)$$

L'indice n indiquant la ligne et p la colonne.

Il est à noter que, dans l'expression des composantes de l'opérateur linéaire \mathbf{R} , seule est prise la valeur de la différence entre les deux indices n et p . L'opérateur \mathbf{R} sera donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & r_0 & ir_1 & -r_2 & -ir_3 & r_4 & \ddots \\ \ddots & -ir_{-1} & r_0 & ir_1 & -r_2 & -ir_3 & \ddots \\ \ddots & -r_{-2} & -ir_{-1} & r_0 & ir_1 & -r_2 & \ddots \\ \ddots & ir_{-3} & -r_{-2} & -ir_{-1} & r_0 & ir_1 & \ddots \\ \ddots & r_{-4} & ir_{-3} & -r_{-2} & -ir_{-1} & r_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} .$$

De plus, l'interface peut, très souvent, être considérée comme isotrope et le coefficient de réflexion est, dans ce cas, une fonction paire de l'angle d'incidence. Cela impose que $\forall n, \quad r_n = r_{-n}$ et offre une propriété de pseudo-symétrie à l'opérateur \mathbf{R} : $R_{np} = (-1)^{p-n} R_{pn}$.

L'opérateur \mathbf{R} étant défini, nous connaissons maintenant la réaction directe de l'interface à l'excitation d'une onde quelconque issue de C qui s'exprime sous la forme $\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi} \rangle$. D'après 2.18 et en utilisant les notations établies en 2.7 et 2.8, elle s'écrit $\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \rangle$. Désormais, l'opérateur \mathbf{R} sera systématiquement employé car il modélise complètement la nature de l'interface et permet le calcul direct de la réflexion par le plan d'une onde cylindrique quelconque émergeant du point C . Pour étudier une interaction élémentaire entre l'interface et le cylindre, il reste maintenant à exprimer la réaction du cylindre par rapport à une onde cylindrique quelconque issue du point symétrique C_s .

2.2.2 Réaction directe du cylindre

Dans le même esprit que pour la réaction de l'interface, nous allons déterminer la réaction directe du cylindre lorsqu'il est excité par une onde cylindrique quelconque $\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^s \rangle$ émergeant du point symétrique C_s . Et, afin de faire apparaître la modélisation sous forme d'opérateurs linéaires, nous considérons tout d'abord l'onde élémentaire $\vec{\Psi}^s$. La première étape est d'exprimer dans le repère cylindrique lié au point C , centre du cylindre réel. Cela est rendu possible par l'application du théorème de Graf qui, avec les notations 1.8 et 1.10, permet d'écrire :

$$\Psi_n^s = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} H_{n+p}^1(kd) \Psi_p^j , \quad (2.20)$$

où d représente la distance entre C et C_s , par suite $d = 2y_c$.

La relation 2.20 introduit un nouvel opérateur linéaire \mathbf{G} , dit de Graf :

$$\mathbf{G} = (G_{np}) \quad \text{et} \quad G_{np} = H_{n+p}^1(kd) . \quad (2.21)$$

Les indices de lignes n et de colonnes p n'intervenant qu'au travers de leurs sommes, l'opérateur \mathbf{G} sera de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & H_{-4}^1(kd) & H_{-3}^1(kd) & H_{-2}^1(kd) & H_{-1}^1(kd) & H_0^1(kd) & \cdot \\ \cdot & H_{-3}^1(kd) & H_{-2}^1(kd) & H_{-1}^1(kd) & H_0^1(kd) & H_1^1(kd) & \cdot \\ \cdot & H_{-2}^1(kd) & H_{-1}^1(kd) & H_0^1(kd) & H_1^1(kd) & H_2^1(kd) & \cdot \\ \cdot & H_{-1}^1(kd) & H_0^1(kd) & H_1^1(kd) & H_2^1(kd) & H_3^1(kd) & \cdot \\ \cdot & H_0^1(kd) & H_1^1(kd) & H_2^1(kd) & H_3^1(kd) & H_4^1(kd) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} .$$

Les coefficients de l'opérateur \mathbf{G} sont tels que : $\forall n$ et $p, G_{np} = G_{pn}$, de sorte que \mathbf{G} est un opérateur autoadjoint ($\mathbf{G} = \mathbf{G}^*$).

Nous pouvons ainsi établir, pour une onde cylindrique quelconque issue de C_s , la relation suivante :

$$\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^s \rangle = \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{G} \cdot \vec{\Psi}^j \rangle . \quad (2.22)$$

Or, il est beaucoup plus simple de calculer la diffusion par le cylindre réel du deuxième terme de l'égalité. Il suffit, en effet, d'utiliser l'opérateur \mathbf{T} introduit au premier chapitre. La réaction directe du cylindre réel par rapport à une onde cylindrique quelconque issue de C_s , $\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^s \rangle$, est $\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle$.

Les opérateurs linéaires \mathbf{R}, \mathbf{G} et \mathbf{T} modélisent les réactions directes de l'interface et du cylindre. Or, le champ de pression total que nous cherchons à calculer, ne se limite pas à la réaction directe de l'interface soumise à une onde issue du cylindre et réciproquement de la réaction directe du cylindre face à une onde émise par l'interface. Les interactions entre l'interface et le cylindre sont multiples. La contribution totale de l'interface (resp. du cylindre) est la somme de toutes les réactions directes provoquées par les ondes issues du cylindre (resp. de l'interface). Nous chercherons ainsi à obtenir une série de Debye généralisée [Con87]. Le champ de pression total sera ensuite égal à la somme de ces deux contributions totales. Nous devons donc, maintenant, envisager les interactions multiples entre l'interface et le cylindre.

2.2.3 Interactions multiples

Contribution provenant du cylindre

Le cylindre et l'interface n'étant pas supposés a priori très éloignés l'un de l'autre, il est clair qu'une onde diffusée par le cylindre engendre une réflexion du plan qui engendre à son

tour une diffusion par le cylindre et ainsi de suite. La contribution totale du cylindre est donc la somme de toutes ces multiples diffusions. Si nous considérons une diffusion par le cylindre initiale $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle$ la réflexion directe du plan est $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \rangle$. Cette réflexion engendre à son tour une diffusion par le cylindre $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle$. Nous poserons :

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \quad (2.23)$$

\mathbf{D} est ainsi un opérateur linéaire associé à une double réaction du plan et du cylindre. L'onde diffusée initiale $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle$ engendre l'onde diffusée $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{\Psi} \rangle$ qui elle-même engendre l'onde $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \cdot \vec{\Psi} \rangle = \langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \vec{\Psi} \rangle$ et ainsi de suite. La n^{ieme} onde diffusée engendrée sera de la forme : $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \vec{\Psi} \rangle$.

La contribution totale du cylindre \mathbf{P}_{cyl} est donnée par la série de Debye généralisée qui est la somme de toutes ces ondes indirectement engendrées :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \vec{\Psi} \rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{D}^n \right) \cdot \vec{\Psi} \right\rangle . \quad (2.24)$$

Il apparaît alors une somme géométrique portant sur l'opérateur \mathbf{D} et donc la contribution totale du cylindre sera finalement égale à :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \vec{\Psi} \right\rangle , \quad (2.25)$$

l'élément \mathbf{I} indiquant l'opérateur identité.

Contribution provenant de l'interface

Nous avons exprimé la contribution totale du cylindre. La contribution totale de l'interface liée aux ondes cylindriques \mathbf{P}_{int} s'obtient quant à elle grâce à l'opérateur \mathbf{R} :

$$\mathbf{P}_{int} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \right\rangle . \quad (2.26)$$

La détermination de chacune des deux contributions est donc complètement établie si nous connaissons la valeur du vecteur $\vec{\mathbf{a}}_0$ caractérisant l'onde diffusée initiale.

2.2.4 Onde diffusée initiale

Il faut rappeler que, dans la situation décrite à la figure 2.1, le champ de pression diffusé par le cylindre réel est provoqué par une onde plane unitaire d'angle d'incidence α . Deux situations peuvent alors se présenter.

Premier cas $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$: il y aura, dans ce cas, la présence de deux ondes planes incidentes pour le cylindre. Comme schématisé à la figure 2.5, les deux ondes présentes seront l'onde incidente issue directement de la source et l'onde plane réfléchie.

L'angle d'incidence de l'onde réfléchie par rapport au cylindre est de $\pi - \alpha$. Il faut également tenir compte du coefficient de réflexion $R(\alpha)$. Dans cette situation, les notations établies en 1.8 et 1.9 nous conduisent à écrire que :

$$\vec{\mathbf{a}}_0 = (a_{0n}) \quad avec \quad a_{0n} = i^n \left(e^{-in\alpha} + R(\alpha) e^{-in(\pi-\alpha)} \right) . \quad (2.27a)$$

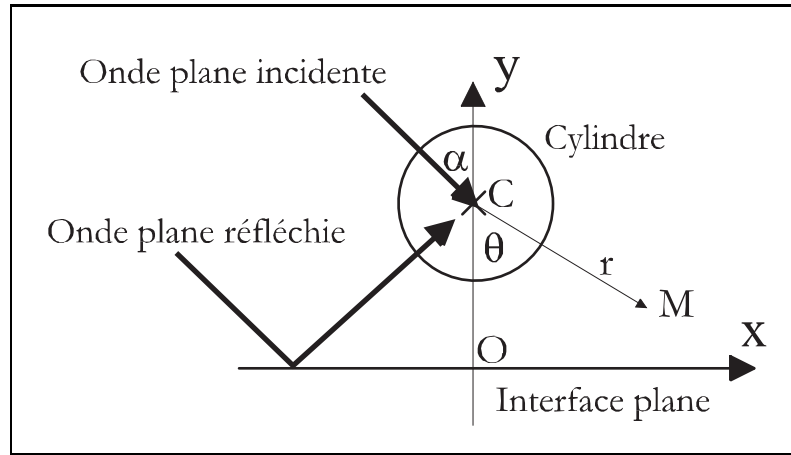


FIG. 2.5 – Vue en coupe des deux ondes planes incidentes

Dans le second cas : la situation est schématisée à la figure 2.6. L'onde réfléchie n'existe plus et l'onde plane incidente est émise par des sources internes au milieu ne contenant pas le cylindre. Nous aurons alors :

$$a_{0_n} = i^n e^{-in\alpha} . \quad (2.27b)$$

L'onde incidente est toujours supposée, ici, unitaire et ne tient pas compte d'un éventuel coefficient de transmission.

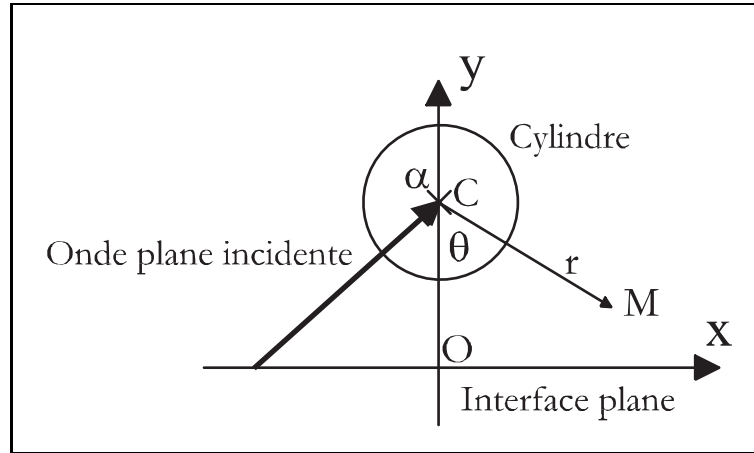


FIG. 2.6 – Vue en coupe de l'onde plane incidente

La détermination de l'onde initialement diffusée par le cylindre clôt la présentation de la méthode générale. Le vecteur \vec{a}_0 étant défini, les expressions 2.25 et 2.26 permettent de calculer les contributions du cylindre et de l'interface. Le champ de pression diffusée total est égal à la somme de ces deux contributions, et on a :

$$\mathbf{p}_{dif} = \left\langle \vec{a}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \vec{\Psi} \right\rangle + \left\langle \vec{a}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \right\rangle . \quad (2.28)$$

2.2.5 Théorie générale et méthode des images

Nous avons vu au début de ce chapitre que la méthode des images s'applique uniquement au cas d'une interface molle ou rigide. Dans le cas d'une interface rigide, le coefficient de réflexion qui lui est associé est $R(\theta) = 1$. La décomposition en série de Fourier donne alors :

$$R_0 = 1 \quad \text{et} \quad R_n = 0, \quad \forall n \neq 0 \quad (2.29)$$

L'opérateur \mathbf{R} de réflexion devient dans ces conditions l'opérateur identité \mathbf{I} . La contribution du cylindre et celle du plan liée aux ondes cylindriques sont alors :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \vec{\Psi} \right\rangle \quad \text{avec} \quad \mathbf{D} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \quad (2.30)$$

et

$$\mathbf{P}_{int} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \vec{\Psi}^s \right\rangle \quad (2.31)$$

Physiquement, la contribution de l'interface s'interprète bien comme la diffusion par un cylindre identique au cylindre réel mais symétrique. En effet, les deux expressions 2.30 et 2.31 ne diffèrent que par l'utilisation de $\vec{\Psi}$ dans le premier cas et $\vec{\Psi}^s$ dans le second. Or ces deux vecteurs indiquent simplement que les contributions du cylindre et de l'interface sont des ondes émergentes issues de sources symétriques par rapport à l'interface. Nous retrouvons ainsi la méthode des images.

De même dans le cas d'une interface molle, le coefficient de réflexion associé est $R(\theta) = -1$. L'opérateur R devient l'opérateur opposé à l'identité et la contribution cylindrique de l'interface est :

$$\mathbf{P}_{int} = - \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \vec{\Psi}^s \right\rangle \quad (2.32)$$

L'interprétation physique est que, conformément à la méthode des images, la contribution de l'interface peut être «remplacée» par celle d'un cylindre antisymétrique au cylindre réel.

2.3 Développements

2.3.1 La méthode des images généralisée et la formulation intégrale

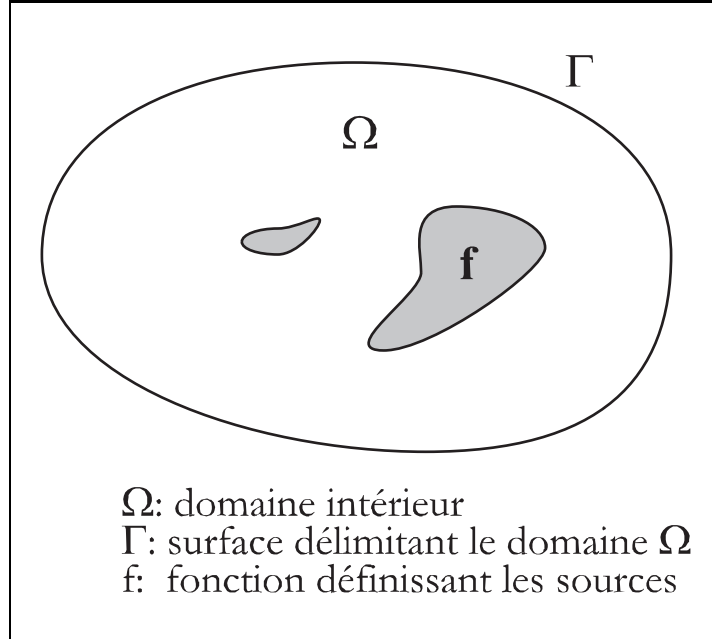


FIG. 2.7 – Schéma général

Dans un espace quelconque Ω , délimité par une surface régulière Γ et contenant des sources continues ou discrètes f (voir schéma 2.7), le champ de pression \mathbf{P} , dans le cadre de l'acoustique harmonique, s'exprime d'une façon générale sous forme d'une équation intégrale (cf. chapitre 6 de [Bru98] ou chapitre 3 de [Fil94]) :

$$\mathbf{P}(\vec{r}) = \iiint_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}_0) f(\vec{r}_0) d\vec{r}_0 + \iint_{\Gamma} \left[G(\vec{r}, \vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \mathbf{P}(\vec{r}_0) - \mathbf{P}(\vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \right] d\vec{r}_0, \quad (2.33)$$

où \vec{n}_0 est le vecteur normal extérieur de la surface Γ , et où G est une fonction appelée «fonction de Green».

En acoustique harmonique, une fonction de Green se définit comme étant une fonction G solution sur le domaine Ω de l'équation de Helmholtz avec second membre :

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}_0) + k^2 = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (2.34)$$

où δ est la distribution de Dirac en dimension 2. Il est à noter qu'une fonction de Green n'admet pas d'autre singularité dans le domaine Ω que le point \vec{r}_0 .

Physiquement, G correspond au champ acoustique créé par un point source unitaire situé en \vec{r}_0 et observé au point \vec{r} , mais sans tenir compte à priori des conditions aux limites. Ceci fait que le choix d'une fonction de Green n'est pas unique.

Il est en revanche possible de choisir la fonction de Green qui vérifie les conditions aux limites imposées sur Γ . Dans ce cas, l'intégrale sur Γ de l'équation 2.33 s'annule et le champ de pression

\mathbf{P} sera de la forme :

$$\mathbf{P}(\vec{r}) = \iiint_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}_0) f(\vec{r}_0) d\vec{r}_0 . \quad (2.35)$$

Cette fonction de Green $G_0(\vec{r}, \vec{r}_0)$ correspond au champ physique réel $\mathbf{P}_{\vec{r}_0}(\vec{r})$ créé par un point situé en \vec{r}_0 et observé à \vec{r} .

En champ libre, le domaine Ω est égale à l'espace tout entier et la surface Γ est rejetée à l'infini. La condition aux limites devient une condition de non retour de l'onde appelée «condition de Sommerfeld à l'infini».

La résolution sous forme intégrale d'un problème de diffusion consiste à calculer ou à estimer la fonction de Green vérifiant les conditions aux limites et à donner l'expression du champ sous la forme de l'intégrale 2.35. Dans certains cas plus complexes, on cherchera à résoudre directement l'équation intégrale 2.33 et à calculer l'intégrale sur Γ de cette expression (cf. chapitre 6 de [Fil94]).

Quoi qu'il en soit, le lien entre la théorie des images généralisée et les méthodes de résolution intégrale peut se faire simplement, si nous pouvons exprimer la solution physique du champ issu d'un point source $\mathbf{P}_{\vec{r}_0}(\vec{r})$, c'est à dire la fonction de Green vérifiant les conditions aux limites.

Il est, par exemple, possible d'identifier la modélisation de l'interface développée dans le cadre des méthodes intégrales à celle issue de la théorie des images généralisée, et vérifier, ainsi, la cohérence des deux théories.

Nous nous plaçons en dimension 2, le domaine Ω est le demi-plan supérieur et la limite Γ est l'interface. Nous cherchons à déterminer le champ acoustique créé par un point source unitaire à proximité de l'interface. En raison des symétries du problème, nous pourrions supposer que le point source se situe sur l'axe des ordonnées, comme indiqué sur le schéma 2.8.

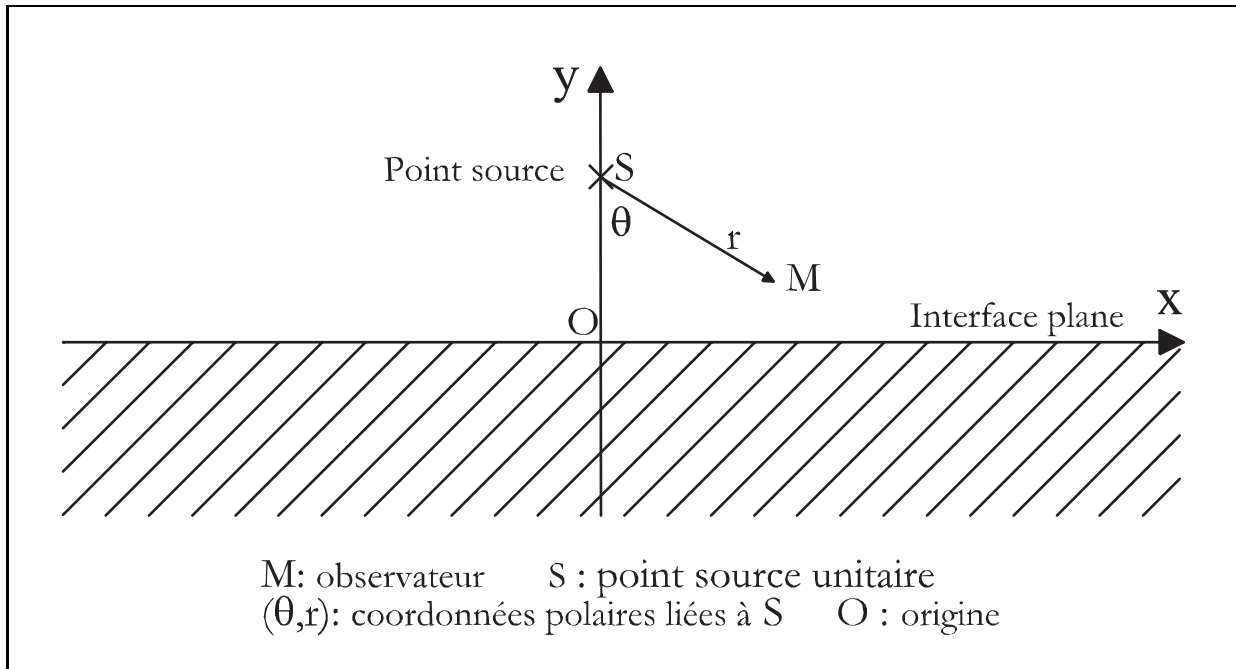


FIG. 2.8 – Point source à proximité de l'interface

En dimension 2, Le champ de pression provoqué par le point source unitaire en champ libre vaut $G_0(r, \theta) = -i/4H_0^1(kr) = -i/4\Psi_0$, en utilisant le repère cylindrique lié à ce point source.

En utilisant les notations précédemment établies, nous avons :

$$G_0(r, \theta) = \langle \vec{\mathbf{g}}_0, \vec{\Psi} \rangle, \quad (2.36a)$$

avec :

$$\vec{\mathbf{g}}_0 = (g_{0_n}) \quad \text{et} \quad g_{0_n} = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ -i/4 & n = 0 \end{cases}. \quad (2.36b)$$

Par construction, l'opérateur \mathbf{R} nous donne la réaction \mathbf{P}_{int} de l'interface engendrée par le champ incident $\mathbf{P}_{inc} = G_0$:

$$\mathbf{P}_{int} = \langle \vec{\mathbf{g}}_0, \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \rangle. \quad (2.37)$$

Le champ physique réel $\mathbf{P}_{\vec{r}_0}(\vec{r})$ provoqué par un point source situé à proximité d'une interface plane est donc :

$$\mathbf{P}_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \mathbf{P}_{inc} + \mathbf{P}_{int} \quad (2.38)$$

$$= \langle \vec{\mathbf{g}}_0, \vec{\Psi} \rangle + \langle \vec{\mathbf{g}}_0, \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \rangle. \quad (2.39)$$

Nous déterminons ainsi la fonction de Green du demi-espace offrant l'expression générale du champ diffusé sous la forme d'une simple intégrale 2.35.

2.3.2 Présentation synthétique de la théorie

La théorie générale présentée au cours de ce chapitre fait appel à une décomposition élémentaire des interactions cylindre-plan. La contribution du cylindre et celle de l'interface apparaissent comme une série de Debye généralisée de toutes les contributions élémentaires. Si cette présentation est physiquement intuitive, il est néanmoins possible d'obtenir les mêmes résultats par une formulation mathématique plus directe, donc plus facile à généraliser.

En toute généralité, la contribution totale de l'interface peut s'écrire :

$$\mathbf{p}_{int} = \mathbf{p}_{ref} + \langle \vec{\mathbf{B}}, \vec{\Psi}^s \rangle. \quad (2.40)$$

\mathbf{p}_{ref} est la réflexion de l'onde plane incidente qui peut être éventuellement nulle dans les cas où l'angle d'incidence est supérieur à $\pi/2$. $\langle \vec{\mathbf{B}}, \vec{\Psi}^s \rangle$ est la réaction \mathbf{P}_{int} de l'interface par rapport aux ondes cylindriques diffusées par le cylindre. Le vecteur $\vec{\mathbf{B}}$ est une inconnue du problème.

De la même façon, la contribution totale du cylindre peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{p}_{cyl} = \langle \vec{\mathbf{A}}, \vec{\Psi} \rangle, \quad (2.41)$$

le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ étant la seconde inconnue du problème.

Le cylindre reçoit : l'onde plane incidente \mathbf{p}_{inc} , éventuellement la réflexion de celle-ci sur l'interface \mathbf{p}_{ref} et la contribution de l'interface $\langle \vec{\mathbf{B}}, \vec{\Psi}^s \rangle$. Or, nous avons vu que la diffusion de l'onde $\mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{ref}$ par le cylindre est $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle$ et peut être interprétée comme l'onde diffusée initiale. Le vecteur $\vec{\mathbf{a}}_0$ est, d'après l'étude faite précédemment, un élément connu du problème.

La diffusion par le cylindre liée à la contribution totale de l'interface est, par définition des opérateurs \mathbf{G} et \mathbf{T} , $\langle \vec{\mathbf{B}}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle$. Nous pouvons alors écrire :

$$\langle \vec{\mathbf{A}}, \vec{\Psi} \rangle = \langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle + \langle \vec{\mathbf{B}}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle . \quad (2.42)$$

Ceci aboutit à l'équation :

$$\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}^* \cdot \vec{\mathbf{B}} + \mathbf{T}^* \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 . \quad (2.43)$$

L'exposant $*$ indique l'opérateur adjoint.

De la même façon, il est possible de considérer l'onde diffusée par le cylindre comme une onde cylindrique incidente pour l'interface. En utilisant la définition de l'opérateur \mathbf{R} , nous obtenons alors la relation suivante :

$$\langle \vec{\mathbf{B}}, \vec{\Psi}^s \rangle = \langle \vec{\mathbf{A}}, \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \rangle , \quad (2.44)$$

d'où l'équation :

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{R}^* \cdot \vec{\mathbf{A}} . \quad (2.45)$$

Les équations 2.43 et 2.45 constituent un système de deux équations à deux inconnues et dont la solution s'écrit, en utilisant la notation 2.23 :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{A}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \\ \vec{\mathbf{B}} &= \mathbf{R}^* \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \end{cases} . \quad (2.46)$$

La contribution totale du cylindre et celle de l'interface peuvent donc s'écrire :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \langle (\mathbf{I} - \mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \vec{\mathbf{a}}_0, \vec{\Psi} \rangle , \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{P}_{int} = \langle \mathbf{R}^* \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D}^*)^{-1} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \vec{\mathbf{a}}_0, \vec{\Psi} \rangle \quad (2.47b)$$

En utilisant les propriétés des opérateurs adjoints, nous retrouvons les expressions 2.25 et 2.26 :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \vec{\Psi} \rangle , \quad (2.48a)$$

$$\mathbf{P}_{int} = \langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \rangle . \quad (2.48b)$$

Cette présentation plus synthétique peut s'avérer fort utile dans les calculs de champs, au sein de géométries plus complexes que celle d'un cylindre unique et d'une interface plane. Nous pouvons envisager, comme dans la partie suivante, le cas d'un cylindre situé entre deux interfaces parallèles.

2.3.3 Cylindre à l'intérieur d'un guide d'ondes plan

Nous allons considérer un cylindre de centre C situé entre deux interfaces parallèles (interface «a» pour la partie inférieure et «b» pour la partie supérieure). L'axe du cylindre est également parallèle aux interfaces. Les ondes incidentes éventuelles sont normales à l'axe du cylindre. Ces conditions nous permettent de ramener le problème en dimension 2 et de le visualiser par le plan de coupe (cf. figure 2.9).

Le point C se place respectivement aux distances Δ_a et Δ_b des interfaces a et b. (θ_a, r) et (θ_b, r) sont deux systèmes de coordonnées polaires associés au point C . On notera $\vec{\Psi}^a$ et $\vec{\Psi}^b$ les bases d'ondes cylindriques émergentes exprimées dans ces deux repères :

$$\Psi_n^a = H_n^1(kr) e^{in\theta_a}, \quad (2.49a)$$

$$\Psi_n^b = H_n^1(kr) e^{in\theta_b}, \quad (2.49b)$$

$$\vec{\Psi}^a = (\Psi_n^a), \quad (2.49c)$$

$$\vec{\Psi}^b = (\Psi_n^b). \quad (2.49d)$$

On remarque que $\theta_a - \theta_b = \pi$ et $\forall n$, $\Psi_n^a = e^{in\pi} \Psi_n^b = (-1)^n \Psi_n^b$. Il est alors permis de définir l'opérateur diagonal \mathbf{H} :

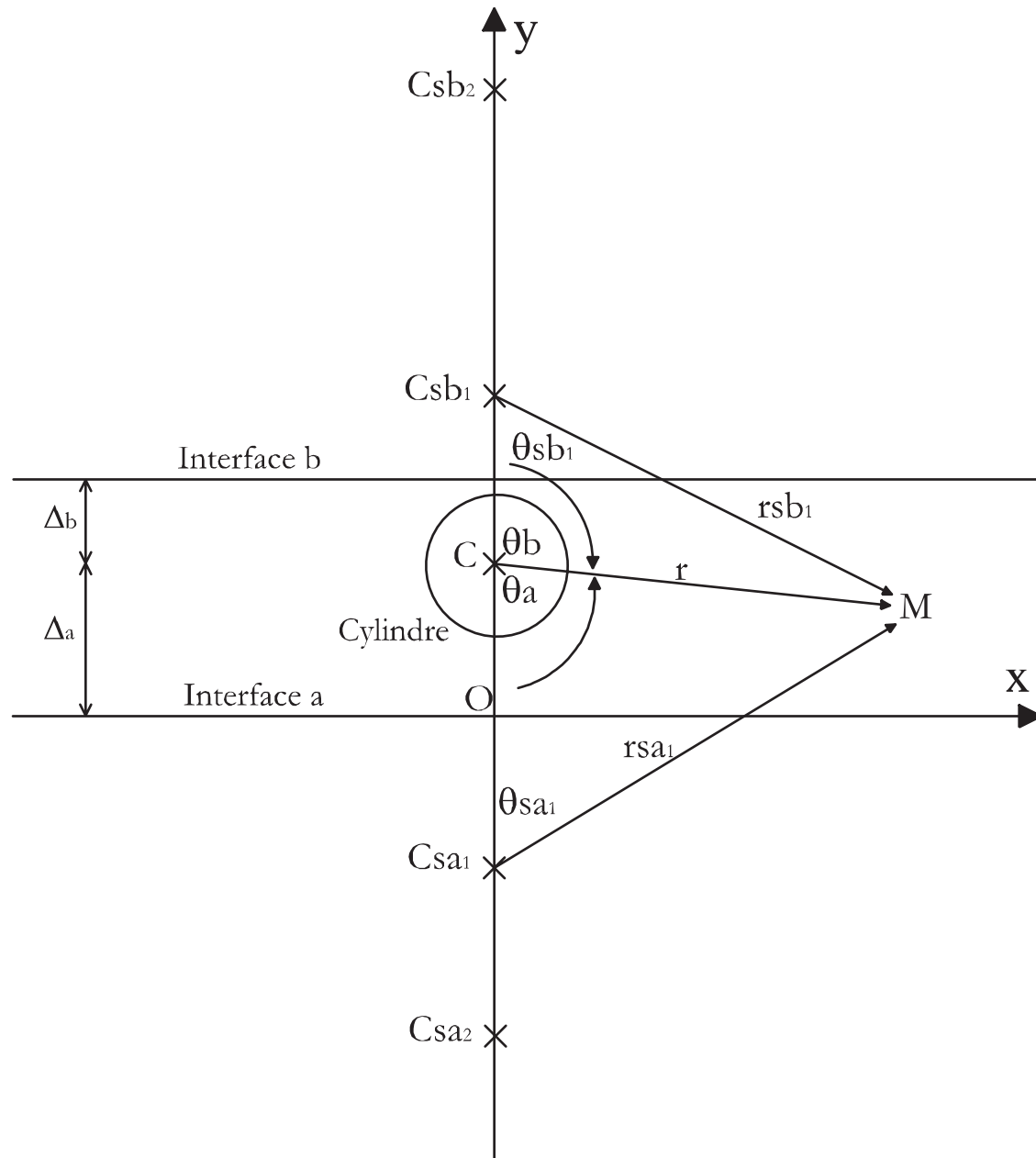
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

tel que :

$$\vec{\Psi}^a = \mathbf{H} \cdot \vec{\Psi}^b \text{ et } \vec{\Psi}^b = \mathbf{H} \cdot \vec{\Psi}^a. \quad (2.51)$$

Le point C_{sa1} (resp. C_{sb1}) est l'image du point C par la symétrie relative à l'interface a (resp. b). (θ_{sa1}, r_{sa1}) (resp. (θ_{sb1}, r_{sb1})) est le repère associé au point C_{sa1} (resp. C_{sb1}). On notera $\vec{\Psi}^{a1}$ et $\vec{\Psi}^{b1}$ les bases d'ondes cylindriques émergentes associées aux points C_{sa1} et C_{sb1} .

Dans un problème de diffusion par le système constitué des deux interfaces et du cylindre, l'onde incidente peut être, a priori, de nature très différente, et il n'est pas possible de traiter le cas général. Nous allons simplement considérer que le cylindre émet une diffusion initiale $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \vec{\Psi}^a \rangle$ et nous chercherons à déterminer le champ total \mathbf{P}_{tot} créé en tenant compte des interactions multiples liées à la présence des interfaces a et b. Le champ total réel $\mathbf{P}_{tot_{reel}}$ provoqué par une onde incidente donnée se détermine, quant à lui, en résolvant le problème de diffusion en l'absence du cylindre et en ajoutant, conformément au principe de superposition, le champ ainsi obtenu $\mathbf{P}_{tot_{inc}}$ au champ \mathbf{P}_{tot} . La diffusion initiale $\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \vec{\Psi}^a \rangle$ étant la diffusion par le cylindre seul du champ $\mathbf{P}_{tot_{inc}}$.



M: observateur **C**: centre du cylindre
 (θ_a, r) et (θ_b, r) : coordonnées polaires liées à **C**
 C_{sa1} : symétrique du point **C** par rapport à l'interface a
 C_{sb1} : symétrique du point **C** par rapport à l'interface b
 (θ_{sa1}, rs_{a1}) : coordonnées polaires liées à C_{s1}
 (θ_{sb1}, rs_{b1}) : coordonnées polaires liées à C_{s2}
 C_{sa2} : symétrique du point C_{sb1} par rapport à l'interface a
 C_{sb2} : symétrique du point C_{sa1} par rapport à l'interface b

FIG. 2.9 – Plan de coupe du guide onde

Approximation à l'ordre 1

Dans un premier temps, nous allons approximer le calcul du champ \mathbf{P}_{tot} en considérant que la réaction de l'interface a (resp. b) face à l'onde issue de l'interface b (resp a.) est nulle. L'interaction entre les deux interfaces se fait alors exclusivement par l'intermédiaire du cylindre.

En utilisant les notions définies pour un cylindre à proximité d'une unique interface, nous noterons respectivement \mathbf{G}_{a1} et \mathbf{G}_{b1} les opérateurs de Graf respectivement associés aux interfaces a et b et aux points C_{sa1} et C_{sb1} . Ces opérateurs permettent d'exprimer les ondes issues des points C_{sa1} et C_{sb1} dans les bases $\vec{\Psi}^a$ et $\vec{\Psi}^b$. De la même façon, nous noterons \mathbf{R}_a et \mathbf{R}_b les opérateurs de réflexion liés aux interfaces a et b. L'opérateur de transition \mathbf{T} définit toujours la caractéristique du cylindre associé aux bases $\vec{\Psi}^a$ et $\vec{\Psi}^b$.

La contribution totale du cylindre \mathbf{P}_{cyl} peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \left\langle \vec{\mathbf{A}}, \vec{\Psi}^a \right\rangle . \quad (2.52)$$

Dans les conditions d'approximation précédemment précisées, les contributions \mathbf{P}_{int_a} et \mathbf{P}_{int_b} des interfaces a et b se résument aux ondes émergentes issues des points C_{sa1} et C_{sb1} :

$$\mathbf{P}_{int_a} = \left\langle \vec{\mathbf{B}}^{a1}, \vec{\Psi}^{a1} \right\rangle , \quad (2.53a)$$

$$\mathbf{P}_{int_b} = \left\langle \vec{\mathbf{B}}^{b1}, \vec{\Psi}^{b1} \right\rangle . \quad (2.53b)$$

Le problème est de déterminer les trois inconnues $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}^{a1}$ et $\vec{\mathbf{B}}^{b1}$.

Toujours dans le cadre de l'approximation posée, les contributions des interfaces a et b peuvent s'interpréter comme étant la réflexion directe du champ total diffusé par le cylindre \mathbf{P}_{cyl} :

$$\mathbf{P}_{int_a} = \left\langle \vec{\mathbf{A}}, \mathbf{R}_a \cdot \vec{\Psi}^{a1} \right\rangle , \quad (2.54a)$$

$$\mathbf{P}_{int_b} = \left\langle \vec{\mathbf{A}}, \mathbf{R}_b \cdot \vec{\Psi}^{b1} \right\rangle . \quad (2.54b)$$

De même, la contribution totale du cylindre \mathbf{P}_{cyl} peut s'interpréter comme étant la somme de la diffusion initiale et des diffusions par le cylindre des ondes issues de C_{sa1} et C_{sb1} :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \vec{\Psi}^a \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{B}}^{a1}, \mathbf{G}_{a1} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^a \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{B}}^{b1}, \mathbf{G}_{b1} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^b \right\rangle . \quad (2.55)$$

Ceci nous donne en utilisant l'opérateur \mathbf{H} :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \vec{\Psi}^a \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{B}}^{a1}, \mathbf{G}_{a1} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^a \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{B}}^{b1}, \mathbf{G}_{b1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{\Psi}^a \right\rangle . \quad (2.56)$$

Les équations 2.54a, 2.54b et 2.56 constituent un système de 3 équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{B}}^{a1} &= \mathbf{R}_a^* \cdot \vec{\mathbf{A}} \\ \vec{\mathbf{B}}^{b1} &= \mathbf{R}_b^* \cdot \vec{\mathbf{A}} \\ \vec{\mathbf{A}} &= \vec{\mathbf{a}}_0 + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \vec{\mathbf{B}}^{a1} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \vec{\mathbf{B}}^{b1} \end{cases} . \quad (2.57)$$

La résolution de ce système aboutit aux solutions :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{A}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \mathbf{R}_a^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \mathbf{R}_b^*)^{-1} \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \\ \vec{\mathbf{B}}^{a1} &= \mathbf{R}_a^* \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \mathbf{R}_a^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \mathbf{R}_b^*)^{-1} \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \\ \vec{\mathbf{B}}^{b1} &= \mathbf{R}_b^* \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \mathbf{R}_a^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \mathbf{R}_b^*)^{-1} \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \end{cases} . \quad (2.58)$$

Les inconnues $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}^{a1}$ et $\vec{\mathbf{B}}^{b1}$ étant déterminées, nous connaissons le champ de pression total \mathbf{P}_{tot} dans le guide d'onde aux approximations d'ordre 1 près.

Approximation à l'ordre 2

A l'ordre 2, nous allons considérer, en plus de ce qui a été fait précédemment, la réaction de l'interface a (resp. b) face aux ondes cylindriques issues du point C_{sb1} (resp. C_{sa1}). Nous noterons C_{sa2} et C_{sb2} (voir figure 2.9) les images respectives des points C_{sb1} et C_{sa1} par la symétrie relative aux interfaces a et b. On définira également les bases d'ondes cylindriques émergentes $\vec{\Psi}^{a2}$ et $\vec{\Psi}^{b2}$ associées aux points C_{sa2} et C_{sb2} . Enfin, on appellera \mathbf{G}_{a2} et \mathbf{G}_{b2} les opérateurs de Graf respectivement associés aux interfaces a et b et aux points C_{sa2} et C_{sb2} .

En revanche, la réaction de l'interface a (resp. b) face aux ondes cylindriques issues du point C_{sb2} (resp. C_{sa2}) sera négligée.

Dans ces conditions, les contributions \mathbf{P}_{int_a} et \mathbf{P}_{int_b} des interfaces a et b s'écrivent, maintenant, sous la forme :

$$\mathbf{P}_{int_a} = \langle \vec{\mathbf{B}}^{a1}, \vec{\Psi}^{a1} \rangle + \langle \vec{\mathbf{B}}^{a2}, \vec{\Psi}^{a2} \rangle, \quad (2.59a)$$

$$\mathbf{P}_{int_b} = \langle \vec{\mathbf{B}}^{b1}, \vec{\Psi}^{b1} \rangle + \langle \vec{\mathbf{B}}^{b2}, \vec{\Psi}^{b2} \rangle, \quad (2.59b)$$

où \mathbf{B}^{a2} et \mathbf{B}^{b2} sont deux nouvelles inconnues du problème de diffusion.

Les ondes cylindriques issues du point C_{sa2} (resp. C_{sb2}) sont la réaction directe de l'interface a (resp. b) face aux ondes cylindriques issues du point C_{sb1} (resp. C_{sa1}), et donc :

$$\langle \vec{\mathbf{B}}^{a2}, \vec{\Psi}^{a2} \rangle = \langle \vec{\mathbf{B}}^{b1}, \mathbf{R}_a \cdot \vec{\Psi}^{a2} \rangle, \quad (2.60a)$$

$$\langle \vec{\mathbf{B}}^{b2}, \vec{\Psi}^{b2} \rangle = \langle \vec{\mathbf{B}}^{a1}, \mathbf{R}_b \cdot \vec{\Psi}^{b2} \rangle. \quad (2.60b)$$

La contribution totale du cylindre \mathbf{P}_{cyl} devient :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \langle \vec{\mathbf{A}}, \vec{\Psi}^a \rangle \quad (2.61a)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \vec{\mathbf{a}}_0, \vec{\Psi}^a \rangle + \langle \vec{\mathbf{B}}^{a1}, \mathbf{G}_{a1} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^a \rangle + \langle \vec{\mathbf{B}}^{b1}, \mathbf{G}_{b1} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^b \rangle \\ &\quad + \langle \vec{\mathbf{B}}^{a2}, \mathbf{G}_{a2} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^a \rangle + \langle \vec{\mathbf{B}}^{b2}, \mathbf{G}_{b2} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^b \rangle. \end{aligned} \quad (2.61b)$$

En utilisant l'opérateur \mathbf{H} , on a :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \langle \vec{\mathbf{A}}, \vec{\Psi}^a \rangle \quad (2.62a)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \vec{\mathbf{a}}_0, \vec{\Psi}^a \rangle + \langle \vec{\mathbf{B}}^{a1}, \mathbf{G}_{a1} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^a \rangle + \langle \vec{\mathbf{B}}^{b1}, \mathbf{G}_{b1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{\Psi}^a \rangle \\ &\quad + \langle \vec{\mathbf{B}}^{a2}, \mathbf{G}_{a2} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^a \rangle + \langle \vec{\mathbf{B}}^{b2}, \mathbf{G}_{b2} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{\Psi}^a \rangle. \end{aligned} \quad (2.62b)$$

Les ondes cylindriques issues des points C_{a1} et C_{b1} sont toujours les réactions directes des interfaces a et b face aux ondes issues du cylindre :

$$\langle \vec{\mathbf{B}}^{a1}, \vec{\Psi}^{a1} \rangle = \langle \vec{\mathbf{A}}, \mathbf{R}_a \cdot \vec{\Psi}^{a1} \rangle, \quad (2.63a)$$

$$\langle \vec{\mathbf{B}}^{b1}, \vec{\Psi}^{b1} \rangle = \langle \vec{\mathbf{A}}, \mathbf{R}_b \cdot \vec{\Psi}^{b1} \rangle. \quad (2.63b)$$

Les équations 2.60a, 2.60b, 2.62a, 2.62b, 2.63a et 2.63b nous permettent de construire un système de 5 équations à 5 inconnues :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{B}}^{a1} = \mathbf{R}_a^* \cdot \vec{\mathbf{A}} \\ \vec{\mathbf{B}}^{b1} = \mathbf{R}_b^* \cdot \vec{\mathbf{A}} \\ \vec{\mathbf{B}}^{a2} = \mathbf{R}_a^* \cdot \vec{\mathbf{B}}^{b1} \\ \vec{\mathbf{B}}^{b2} = \mathbf{R}_b^* \cdot \vec{\mathbf{B}}^{a1} \\ \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{a}}_0 + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \vec{\mathbf{B}}^{a1} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \vec{\mathbf{B}}^{b1} \\ \quad + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a2}^* \cdot \vec{\mathbf{B}}^{a2} + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b2}^* \cdot \vec{\mathbf{B}}^{b2} \end{cases} \quad (2.64)$$

La résolution de ce système aboutit aux solutions :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{A}} = (I - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \mathbf{R}_a^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \\ \quad - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a2}^* \cdot \mathbf{R}_a^* \cdot \mathbf{R}_b^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b2}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \cdot \mathbf{R}_a^*)^{-1} \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \\ \vec{\mathbf{B}}^{a1} = \mathbf{R}_a^* \cdot (I - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \mathbf{R}_a^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \\ \quad - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a2}^* \cdot \mathbf{R}_a^* \cdot \mathbf{R}_b^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b2}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \cdot \mathbf{R}_a^*)^{-1} \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \\ \vec{\mathbf{B}}^{b1} = \mathbf{R}_b^* \cdot (I - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \mathbf{R}_a^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \\ \quad - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a2}^* \cdot \mathbf{R}_a^* \cdot \mathbf{R}_b^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b2}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \cdot \mathbf{R}_a^*)^{-1} \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \\ \vec{\mathbf{B}}^{a2} = \mathbf{R}_a^* \cdot \mathbf{R}_b^* \cdot (I - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \mathbf{R}_a^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \\ \quad - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a2}^* \cdot \mathbf{R}_a^* \cdot \mathbf{R}_b^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b2}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \cdot \mathbf{R}_a^*)^{-1} \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \\ \vec{\mathbf{B}}^{b2} = \mathbf{R}_b^* \cdot \mathbf{R}_a^* \cdot (I - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a1}^* \cdot \mathbf{R}_a^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b1}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \\ \quad - \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{a2}^* \cdot \mathbf{R}_a^* \cdot \mathbf{R}_b^* - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{G}_{b2}^* \cdot \mathbf{R}_b^* \cdot \mathbf{R}_a^*)^{-1} \cdot \vec{\mathbf{a}}_0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Le raisonnement général peut facilement être poursuivi jusqu'à l'approximation à l'ordre n . On prend alors en compte la réaction de l'interface a (resp. b) vis à vis des ondes cylindriques issues des points C_{sbn-1} (resp. C_{san-1}). Et on néglige la réaction de l'interface a (resp. b) vis à vis des ondes cylindriques issues des points C_{sbn} (resp. C_{san}).

Cette modélisation présente l'avantage de rester dans le cadre strict de la théorie modale, ce qui, vu le caractère algébrique de la théorie, facilite grandement l'implémentation numérique et aboutit généralement à des algorithmes très rapides. De plus, d'un point de vue physique, nous avons une idée très précise de l'approximation effectuée à chaque ordre. A l'ordre n , on néglige toutes les images du cylindre provoquées par plus de n réflexions sur les interfaces. Dans la réalité, on peut ajouter que les interfaces sont absorbantes et la méthodologie décrite converge alors rapidement avec l'ordre.

Enfin, il est à noter que le point C_{san+2} (resp. C_{sbn+2}) est l'image par la composée des deux symétries axiales relatives aux deux interfaces parallèles a et b du point C_{san} (resp. C_{sbn}). C_{san+2} (resp. C_{sbn+2}) est ainsi l'image par une translation d'une longueur $2(\Delta_a + \Delta_b)$ du point C_{san} (resp. C_{sbn}). Les points images constituent donc un réseau régulier de sources. Il est, alors, permis de penser que des simplifications d'écriture sont possibles, et que la méthodologie puisse être grandement améliorée.

Chapitre 3

Analyse du modèle de réflexion directe

Introduction

Le deuxième chapitre a constitué une présentation formelle de la théorie et, de ce point de vue, a montré qu'elle offre un outil intéressant, notamment en ce qui concerne le guide d'onde. Toutefois, cette présentation reste formelle et ne bénéficie pas de toute la rigueur mathématique nécessaire, car certaines justifications n'ont pas été apportées pour la valider. Pour être précis, la principale carence de rigueur de la construction a été d'avoir identifié le coefficient de réflexion de l'interface plane $R(\theta)$ à sa série de Fourier sur un contour de Sommerfeld, qui est un contour du plan complexe. Or nous allons montrer que cette identité est loin d'être évidente. Ce point sera éclairci, et le problème majeur, qui en découle, relatif à la construction de l'opérateur de réflexion \mathbf{R} constituera l'axe central de ce chapitre.

Ce chapitre a pour but de compléter la description théorique, mais surtout de voir dans quelle mesure peut s'effectuer l'exploitation numérique des formules qui en découlent.

Dans une première partie, nous analyserons plus en détail le problème posé par la modélisation du coefficient de réflexion de l'interface. Nous étudierons plus précisément les problèmes liés à la convergence de sa série de Fourier dans le plan complexe. Cela aboutira à la mise en évidence des contraintes imposées à la méthode numérique et à un domaine de validité de celle-ci.

La deuxième partie sera consacrée à l'étude numérique de l'interface fluide-fluide. Deux catégories précises seront distinguées et les caractéristiques propres à ces deux groupes d'interfaces fluide-fluide sera explicité. Le rôle joué par l'absorption sur la convergence numérique du modèle sera également abordé.

Dans une troisième partie, nous reprendrons ce travail dans le cas d'une interface fluide-solide. Nous chercherons alors à mettre en évidence les différences avec le cas de l'interface fluide-fluide.

3.1 Problème théorique lié au coefficient de réflexion

Les raisonnements, au cours du chapitre précédent, se sont faits sans connaître, a priori, la fonction $R(\theta)$ définissant le coefficient de réflexion. Nous ne pouvons pas non plus dire grand chose sur la série de Fourier qui lui est associée. Or, les résultats classiques généraux de la convergence d'une série de Fourier relative à une fonction périodique ne concernent que l'axe des réels \mathbb{R} [Gas97].

Dans ces conditions, il devient nécessaire de justifier le point le plus délicat qui est l'utilisation théorique de la série de Fourier de la fonction $R(\theta)$ dans le plan complexe \mathbb{C} . Il faut, notamment, établir la nature, convergente ou non, de cette série de Fourier sur un contour de Sommerfeld.

3.1.1 Série de Fourier

Nous avons vu que l'onde élémentaire Ψ_n émise par le cylindre pouvait s'exprimer par un spectre d'ondes planes (confère 2.12) :

$$\Psi_n = H_n^1(kr) e^{in\theta} = \frac{1}{\pi} \int_S e^{ik(x \sin \theta_k - (y-y_c) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k . \quad (3.1)$$

La réaction directe de l'interface nous est donnée par l'expression 2.13 :

$$\Psi_n^r = \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_c) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k . \quad (3.2)$$

Afin de revenir à une expression sous forme de série modale, la fonction $R(\theta)$ est décomposée en une série de Fourier :

$$R(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{im\theta} . \quad (3.3)$$

Ceci nous a donné la relation 2.15 :

$$\Psi_n^r = \frac{1}{\pi} \int_S \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{im\theta_k} \right) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_c) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k . \quad (3.4)$$

Or, cette décomposition en série de Fourier est purement formelle. En effet, s'il est facile de démontrer la convergence de la série de Fourier vers la fonction $R(\theta)$ sur l'axe des réels, cela ne justifie en rien la convergence de cette série sur le contour d'intégration S du plan complexe.

En posant $z = e^{i\theta}$, nous mettons la série $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{im\theta}$ sous la forme d'une série de Laurent $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m z^m$. Le théorème de Cauchy-Hadamard, confère [Cha90], nous permet d'affirmer que cette série de Laurent est convergente sur le disque de rayon inférieur r_{inf} et de rayon supérieur r_{sup} (voir schéma 3.1), avec :

$$\frac{1}{r_{sup}} = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \|R_m\|^{1/m} , \quad (3.5)$$

et

$$r_{inf} = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \|R_{-m}\|^{1/m} , \quad (3.6)$$

où \limsup indique la limite supérieure.

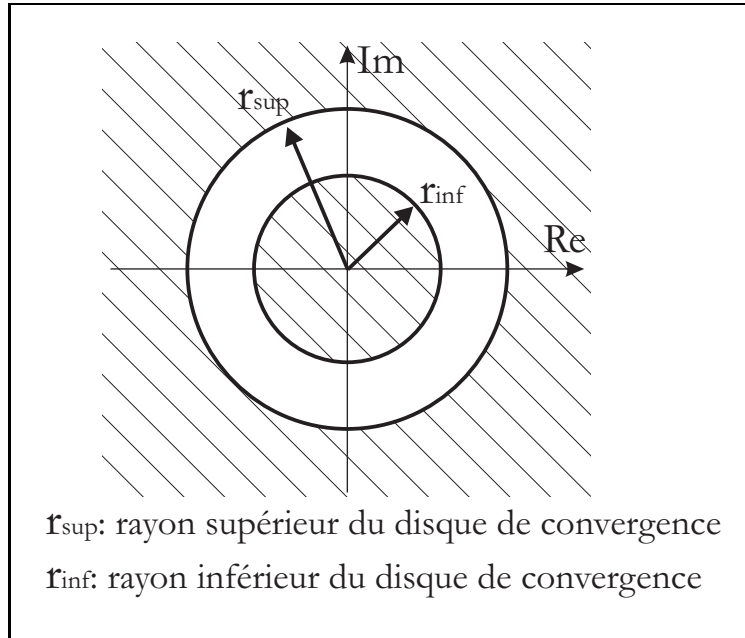


FIG. 3.1 – Disque de convergence pour la variable z

On notera que, mis à part quelques rares exceptions, la fonction $R(\theta)$ est une fonction paire et $\forall m, R_m = R_{-m}$. Ceci impose que $r_{inf} = 1/r_{sup}$.

En revenant à la variable θ , le disque de convergence de la variable z impose que :

$$r_{inf} < \|e^{i\theta}\| < r_{sup} , \quad (3.7)$$

c'est à dire que :

$$-\ln(r_{inf}) > \text{Im}(\theta) > -\ln(r_{sup}) , \quad (3.8)$$

où \ln indique la fonction du logarithme népérien et Im la partie imaginaire.

En utilisant la parité de la fonction $R(\theta)$, on a :

$$\ln(r_{sup}) > \text{Im}(\theta) > -\ln(r_{sup}) , \quad (3.9)$$

et

$$rb_{sup} > \text{Im}(\theta) > -rb_{sup} , \quad (3.10)$$

avec $rb_{sup} = \ln(r_{sup})$.

Ainsi, la série de Fourier associée à $R(\theta)$ est une série convergente dans le plan complexe sur une bande de largeur $2rb_{sup}$ autour de l'axe réel (voir schéma 3.2).

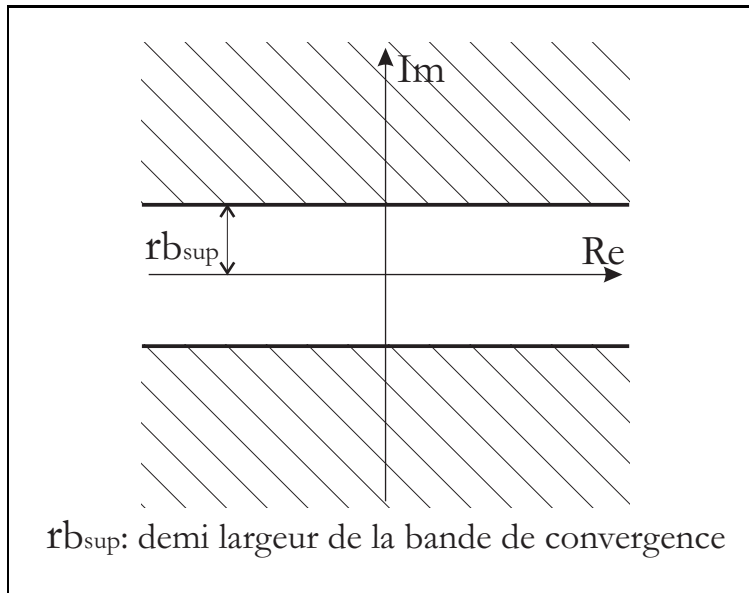


FIG. 3.2 – Bande de convergence pour la variable θ

Le rayon de convergence ou la largeur de la bande de convergence, suivant qu'il s'agit de la variable z ou θ , concerne la série 3.3 ayant une infinité de termes. Ce rayon et cette largeur sont indépendants d'une éventuelle troncature de la série.

On notera enfin que, excepté le cas exceptionnel où $(r_{sup} = +\infty)$, la série de Laurent n'est convergente que sur un ensemble borné et en dehors de cet ensemble les termes même de la série divergent. Or sur un contour de Sommerfeld, le terme $\text{Im}(\theta)$ n'est pas borné. La série de Fourier est donc, sur ce contour, divergente. La méthode présentée au deuxième chapitre n'est donc pas validée au sens mathématique conventionnel. Toutefois, nous verrons que l'utilisation de la série de Fourier peut se concevoir au sens des séries asymptotiques.

3.1.2 Exploitation Numérique

D'un point de vue numérique, il est intuitif de penser que l'exploitation des formules théoriques se rapproche du résultat réel si le rayon r_{sup} tend vers $+\infty$. C'est à dire si les coefficients de la série de Fourier associée à la fonction $R(\theta)$ décroissent très rapidement. En ce sens, on peut dire que la fonction $R(\theta)$ doit être la plus régulière possible. Cette décroissance sera un élément important à mettre en évidence.

Cependant, la notion de décroissance des coefficients de la série de Fourier ou de domaine de convergence, ne se conçoit qu'avec une série non tronquée, et ceci peut s'avérer un critère peu efficace à appréhender sur un nombre limité de termes. Il faudra donc chercher à préciser d'autres critères qui soient numériquement plus pertinents. Par exemple sur le contour d'intégration numérique 3.3, il sera nécessaire de qualifier la convergence de la série de Fourier le long des branches $]-\pi/2 + i\infty, -\pi/2]$ et $[\pi/2, \pi/2 - i\infty[$.

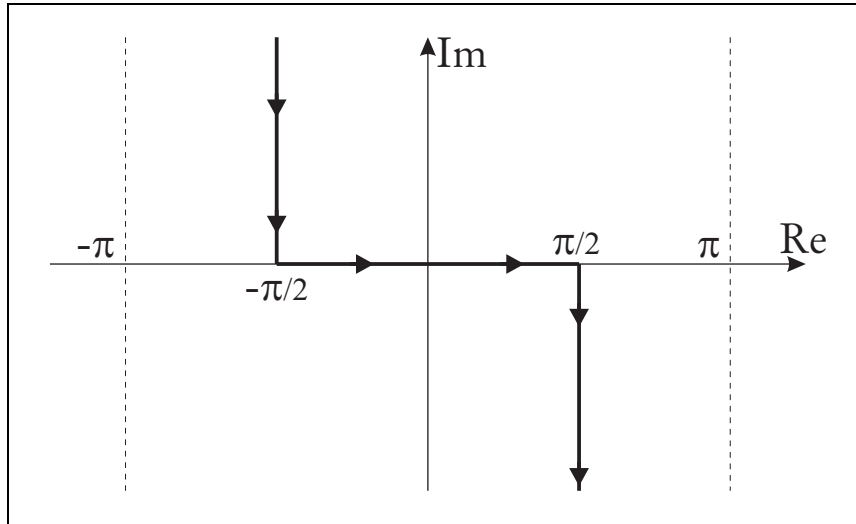


FIG. 3.3 – Contour de Sommerfeld d'intégration numérique

Dans les deux parties qui suivent, nous allons étudier ces différents points dans le cadre d'une interface plane fluide-fluide et d'une interface plane fluide-solide. L'élément principal de comparaison des résultats obtenus sera le calcul intégral direct d'un champ physique élémentaire (Fonction de Green).

3.2 Interface fluide-fluide

3.2.1 Premier cas

Conformément à la figure 3.4, le milieu fluide du demi-espace supérieur, respectivement inférieur, sera noté 1, respectivement 2.

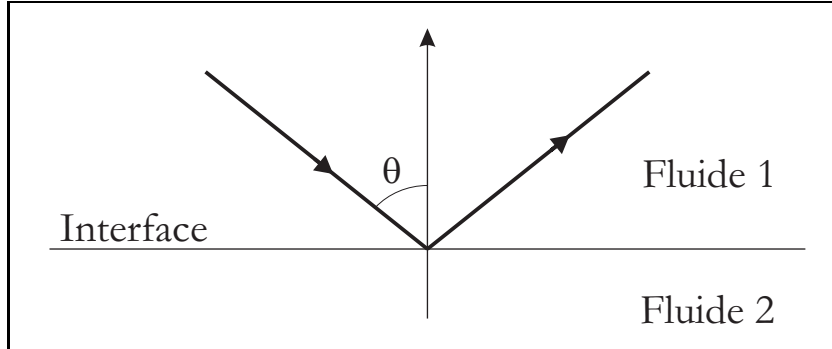


FIG. 3.4 – Réflexion de l'interface plane fluide-fluide

Connaissant les vitesses de propagation et la masse volumique de ces deux milieux, $\{c_1, \rho_1\}$ et $\{c_2, \rho_2\}$, nous pouvons déterminer de façon exacte l'expression du coefficient de réflexion $R(\theta)$ associée à une interface fluide-fluide [Bre90, Con91] :

$$R(\theta) = \frac{\rho_2/\rho_1 \cos \theta - \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}}{\rho_2/\rho_1 \cos \theta + \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}} \quad (3.11)$$

Il faut noter que dans la définition du coefficient de réflexion fluide-fluide 3.11, la fonction $\sqrt{\quad}$ est une fonction multivalente [Cha90] et que sur le plan complexe $\sqrt{z^2} = z$ ou $\sqrt{z^2} = -z$. Pour lever cette indétermination, il faut rappeler que $\sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta} * c_2/c_1$ exprime le cosinus de l'angle réfracté θ_r , voir figure 3.5

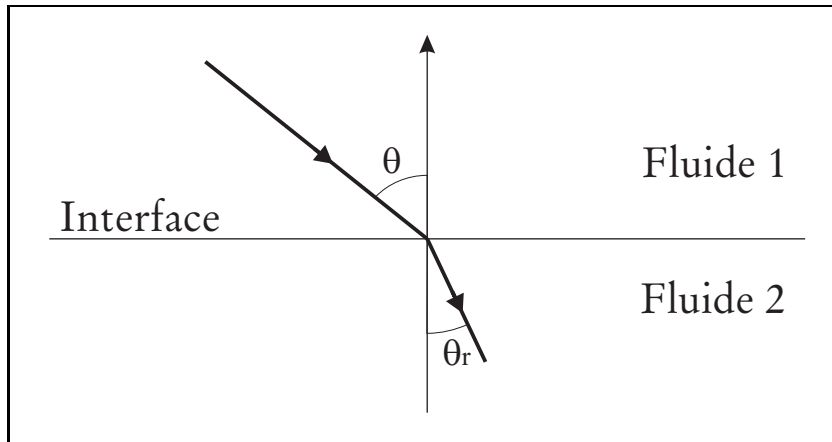


FIG. 3.5 – Réfraction de l'interface plane fluide-fluide

L'onde réfractée dans le milieu 2 est alors de la forme : $Constante e^{ik \sin \theta_r x} e^{-ik \cos \theta_r y}$, x et y étant respectivement l'abscisse et l'ordonnée de l'observateur. La condition de Sommerfeld à

l'infini quand $y \rightarrow -\infty$, impose que $Im(\cos \theta_r) \geq 0$ ($Im()$ indique la partie imaginaire). C'est à dire que $Im\left(\sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}\right) \geq 0$. Par la suite, la fonction $\sqrt{\quad}$ devra toujours être étudiée dans le feuillet qui vérifie cette condition.

Dans un premier temps, nous choisirons pour le second milieu l'eau et pour le premier un milieu sédimentaire considéré comme un fluide parfait, nous aurons les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_1 &= 1780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho_2 &= 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_2 &= 1470 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Régularité de la fonction

La vitesse de propagation des ondes dans l'eau étant inférieure à celle dans le premier milieu, le coefficient de réflexion fluide-fluide $R(\theta)$ associé à l'interface sera une fonction réelle de θ sur l'axe réel, voir figure 3.6.

Sur l'intervalle $[\pi/2, \pi/2 - I\infty[$, la norme du coefficient de réflexion décroît rapidement au-delà du point de branchement $z = \arcsin(c_1/c_2) \simeq \pi/2 - I*0.638$, voir figure 3.7. Sur l'intervalle $]-\pi/2 + I\infty, -\pi/2]$, le coefficient de réflexion étant une fonction paire, la courbe se déduit de la figure 3.7 par symétrie. Cette décroissance sur les deux branches infinies permet de vérifier la prépondérance numérique de la fonction $R(\theta)$ quand un point du contour de Sommerfeld se trouve dans la région du plan complexe proche de l'axe réel.

Dans le plan complexe, la fonction $R(\theta)$ admet quatre points de branchement et deux pôles $z = \pm \arccos\left[-\sqrt{\frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}}\right]$, confère annexe A. Numériquement, les pôles se situent en $z \simeq \pm(\pi/2 + I0.91)$, voir la vue globale sur la figure 3.8. Qualitativement, les pôles se trouvent éloignés du contour de Sommerfeld et ne viennent pas «perturber» la régularité de la fonction sur ce contour.

Si on élimine les cas extrêmes des interfaces rigides et molles, la fonction mathématique exprimant le coefficient de réflexion fluide-fluide offre le minimum d'irrégularité autour de l'axe réel, et, de ce point de vue, les conditions d'utilisation de la théorie décrite au chapitre précédent semblent optimales.

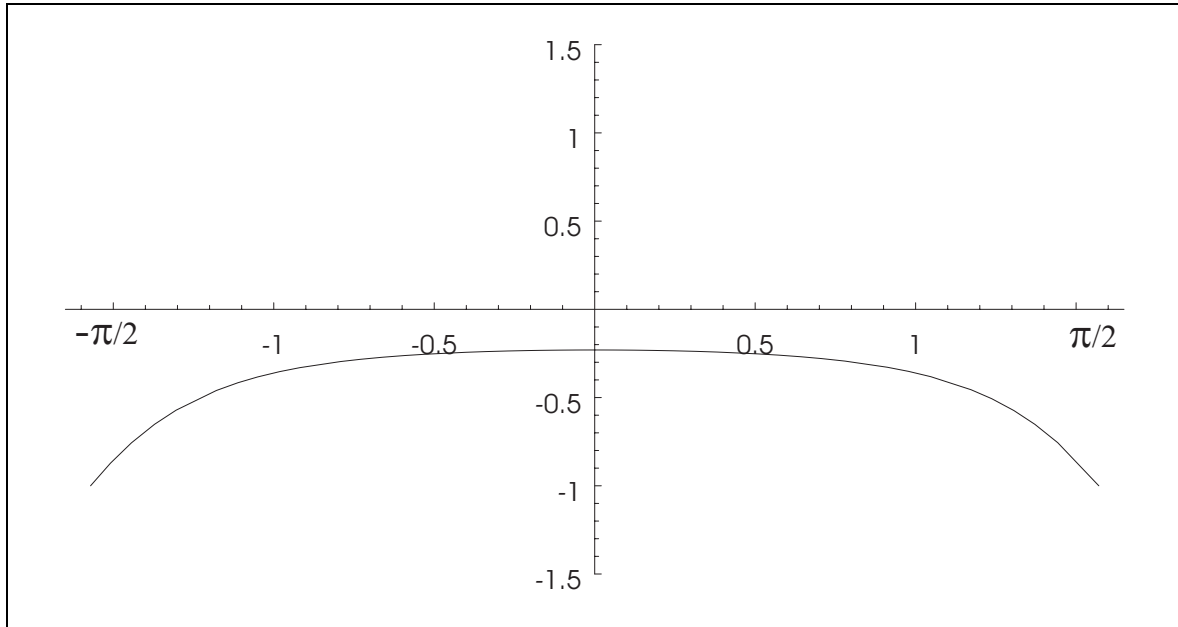


FIG. 3.6 – Coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (premier cas)

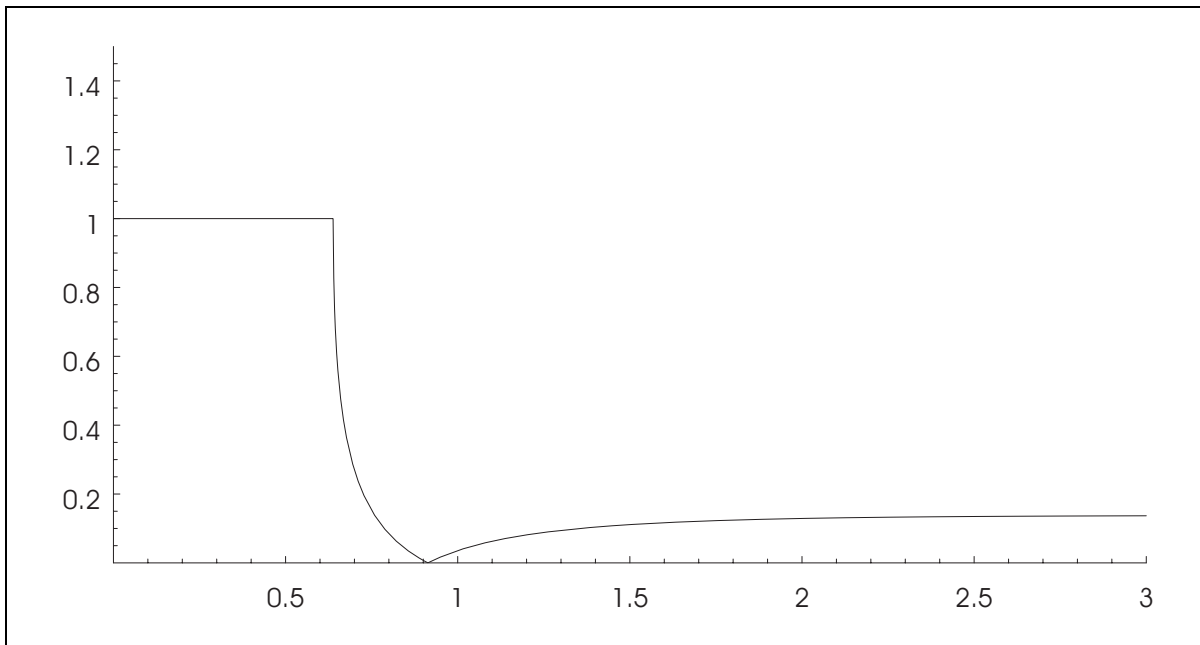


FIG. 3.7 – Norme du coefficient de réflexion fluide-fluide en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$ (premier cas)

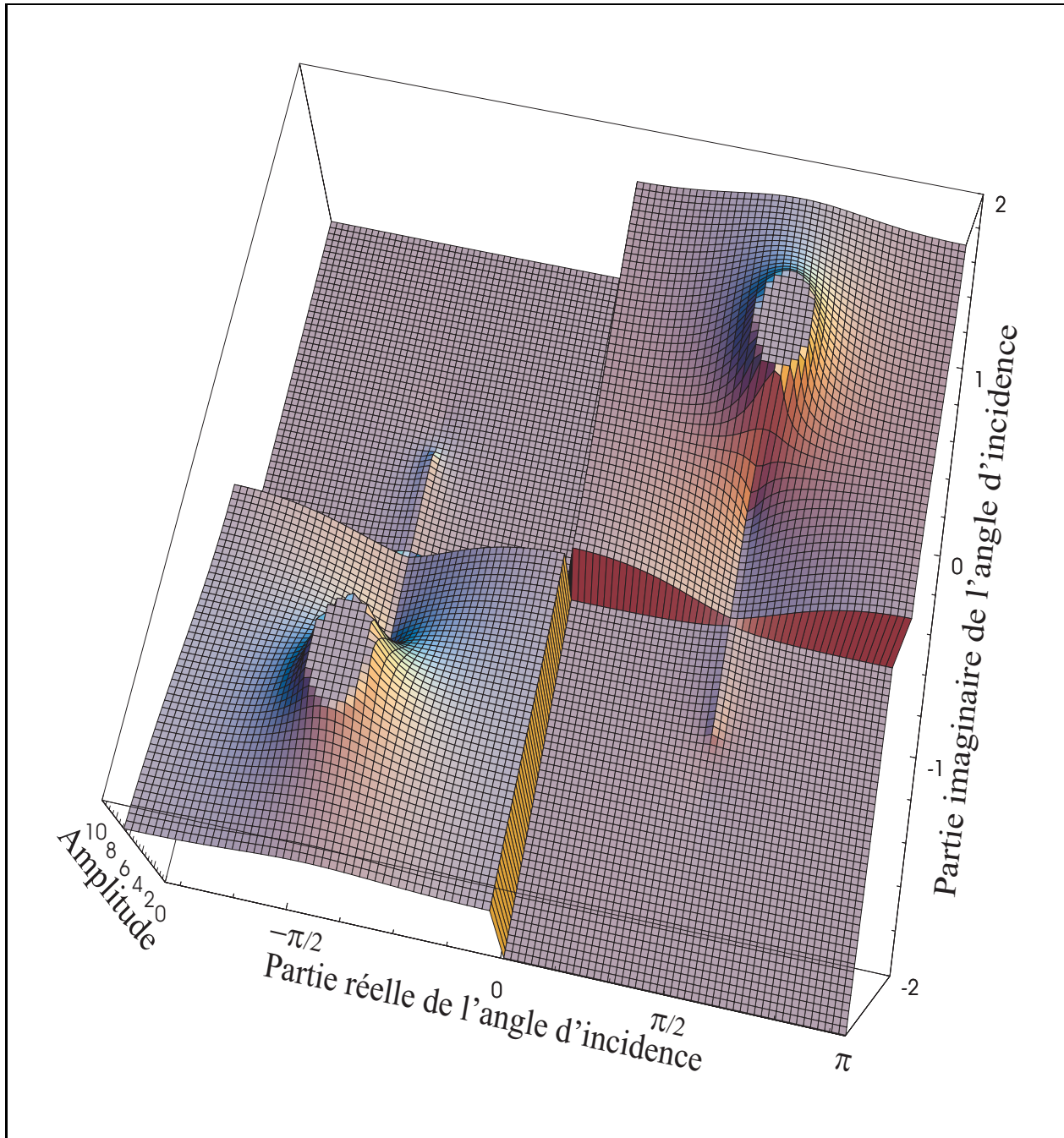


FIG. 3.8 – Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-fluide sur le plan complexe (premier cas)

Approximation par la série de Fourier

La série de Fourier associée au coefficient de réflexion fluide-fluide $R(\theta)$ permet de définir une fonction $RFourier(\theta)$ sur le plan complexe, tel que :

$$RFourier(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{im\theta}, \quad (3.13)$$

avec $R_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(x) e^{-imx} dx$.

On notera également $RFourier_N(\theta)$ la fonction issue de la troncature à l'ordre N de la série 3.13.

On constate, voir figure 3.9, que la norme des coefficients de Fourier décroît très rapidement avec l'ordre. Au-delà de l'ordre 10, les coefficients deviennent infinitésimaux.

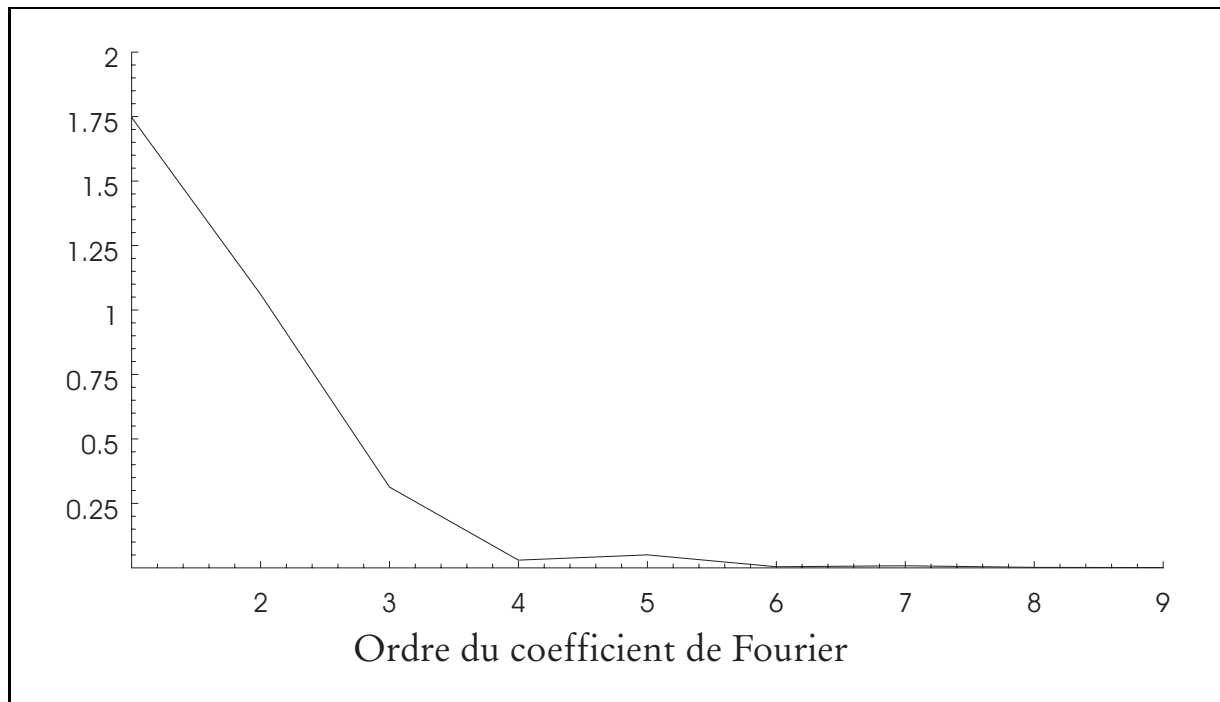


FIG. 3.9 – Norme des coefficients de la série de Fourier en fonction de leur ordre

Cette décroissance rapide est une conséquence directe de la régularité de la fonction $R(\theta)$, et confirme la convergence rapide de la fonction $RFourier_N(\theta)$ sur l'axe réel. La figure 3.10 montre, en effet, que sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ la norme de l'erreur commise entre $RFourier_{10}$ et R est négligeable.

En revanche, la convergence sur les branches infinies s'avère plus discutable. Sur la figure 3.11, on constate que l'erreur commise $RFourier_{10}$ et R est minimale dans une zone proche de l'axe réel, mais que cette erreur tend vers l'infini en s'écartant de cet axe. Ce phénomène est bien évidemment lié à la sortie du domaine de convergence de la série $RFourier$.

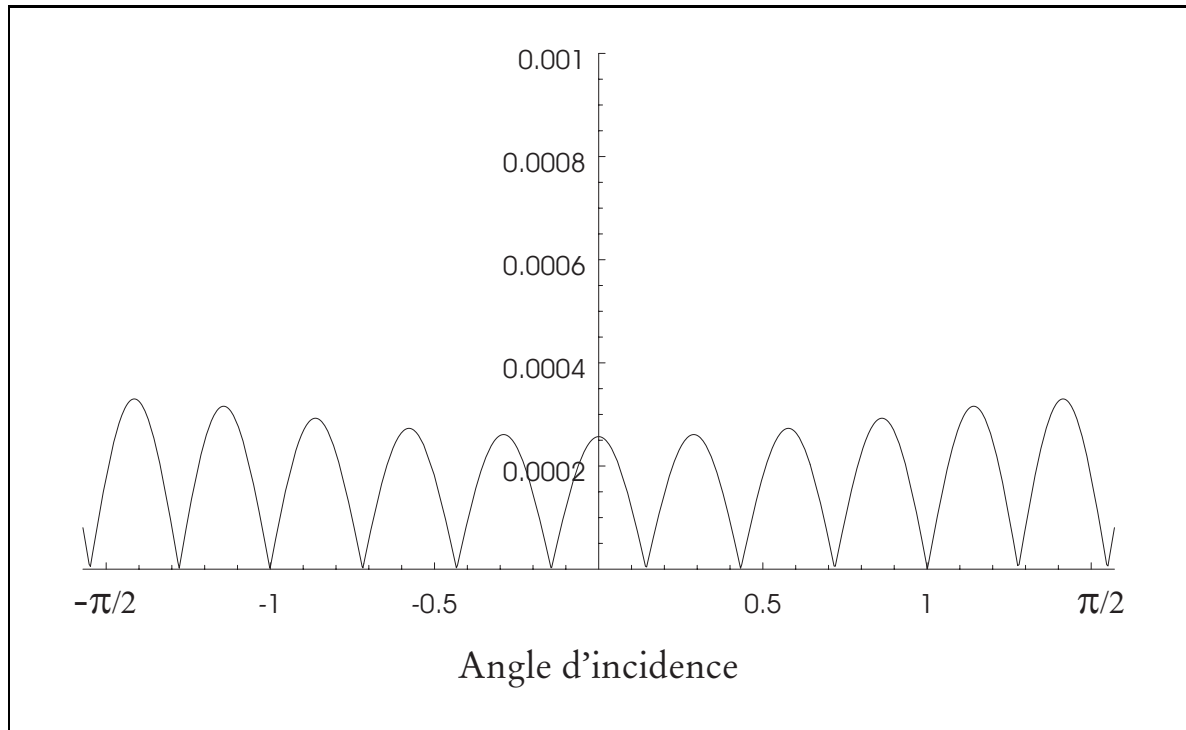


FIG. 3.10 – Norme de $RFourier_{10}(\theta) - R(\theta)$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$

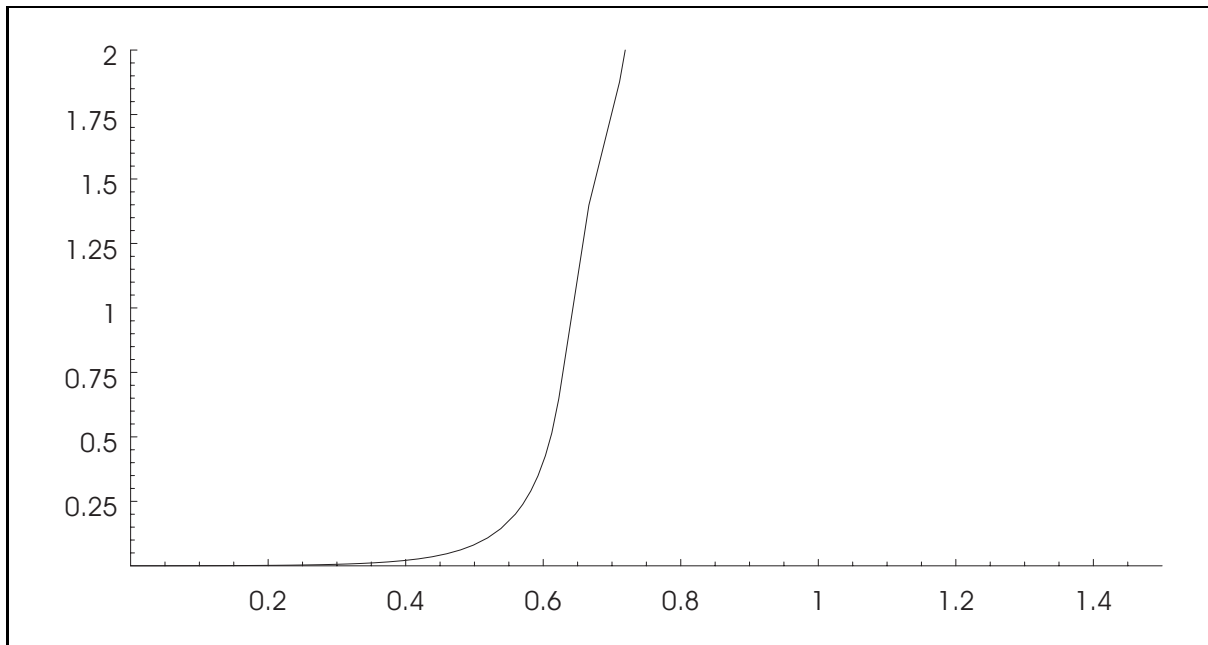


FIG. 3.11 – Norme de $RFourier_{10}(\theta) - R(\theta)$ en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$

La convergence de la fonction R Fourier vers la fonction R n'étant que partiellement assurée sur le plan complexe, il n'est pas possible de justifier directement la construction théorique de la méthode des images généralisée. Nous allons maintenant apporter des éléments de justification en comparant le calcul d'un champ élémentaire (fonction de Green) effectué par la méthode des images généralisée à celui estimé par une méthode intégrale.

Estimation de la fonction de Green

Nous avons vu au chapitre précédent que la fonction de Green, dans le cadre d'un demi-espace, est la fonction mathématique exprimant le champ acoustique total, dans le demi-espace concerné et produit par une source ponctuelle unitaire à proximité d'une interface.

En dimension 2, la source ponctuelle unitaire vaut $G_0(r, \theta) = -i/4H_0^1(kr) = -i/4\Psi_0$ dans le repère cylindrique lié à la source. La décomposition en spectre d'ondes planes de cette source permet de donner l'expression du champ acoustique total en tenant compte de la réflexion de l'interface :

$$P_{tot} = -\frac{i}{4} \left[\Psi_0 + \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_S) \cos \theta_k)} d\theta_k \right], \quad (3.14)$$

où $R(\theta)$ est le coefficient de réflexion du plan, y_S est l'ordonnée du point source et $\{x, y\}$ les coordonnées de la position de l'observateur.

En appliquant la méthode des images généralisée, nous avons trouvé que, par définition de l'opérateur linéaire de réflexion \mathbf{R} , ce champ total était égal à :

$$\mathbf{P}_{tot} = \langle \vec{\mathbf{g}}_0, \vec{\Psi} \rangle + \langle \vec{\mathbf{g}}_0, \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \rangle, \quad (3.15a)$$

avec :

$$\vec{\mathbf{g}}_0 = (g_{0n}) \quad \text{et} \quad g_{0n} = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ -i/4 & n = 0 \end{cases}. \quad (3.15b)$$

Sous forme de série explicite, l'expression 3.15a s'écrit :

$$\mathbf{P}_{tot} = -\frac{i}{4} \left[\Psi_0 + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p i^p \Psi_p^s \right], \quad (3.16)$$

où r_p est le p -ième coefficient de la série de Fourier associée à la fonction $R(\theta)$.

Afin de valider la cohérence de la méthode intégrale avec la méthode des images généralisée, il faut vérifier l'égalité entre les expressions :

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_S) \cos \theta_k)} d\theta_k, \quad (3.17a)$$

$$E_2(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p i^p \Psi_p^s, \quad (3.17b)$$

pour plusieurs positions de l'observateur M .

Numériquement, les modules des termes de la série 3.17b pour un observateur situé à $kr_s = 10$, $kr_s = 20$ et $kr_s = 50$, avec r_s la distance entre l'observateur et l'image du point source (voir figure 3.12), nous sont donnés par les figures 3.13, 3.14 et 3.15.

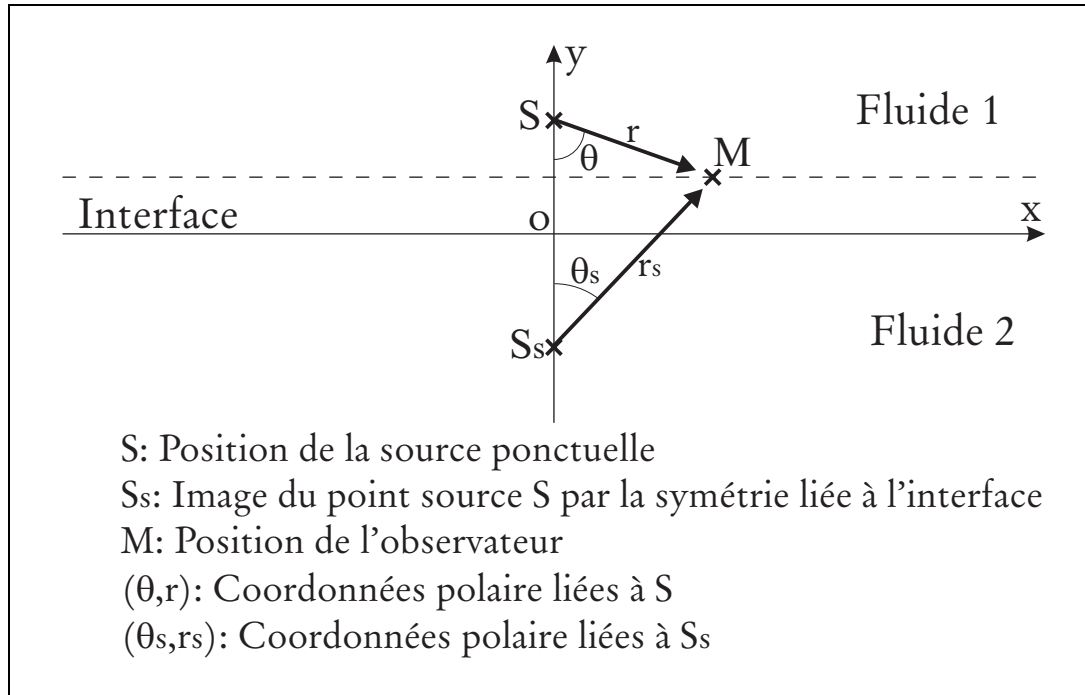
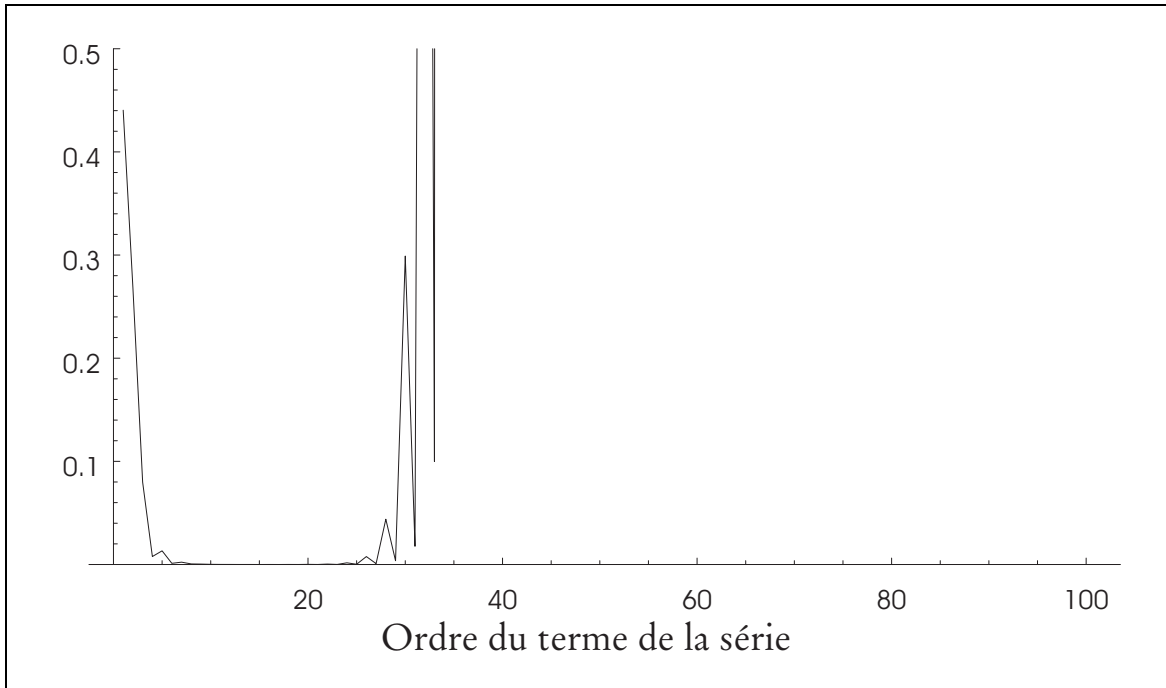
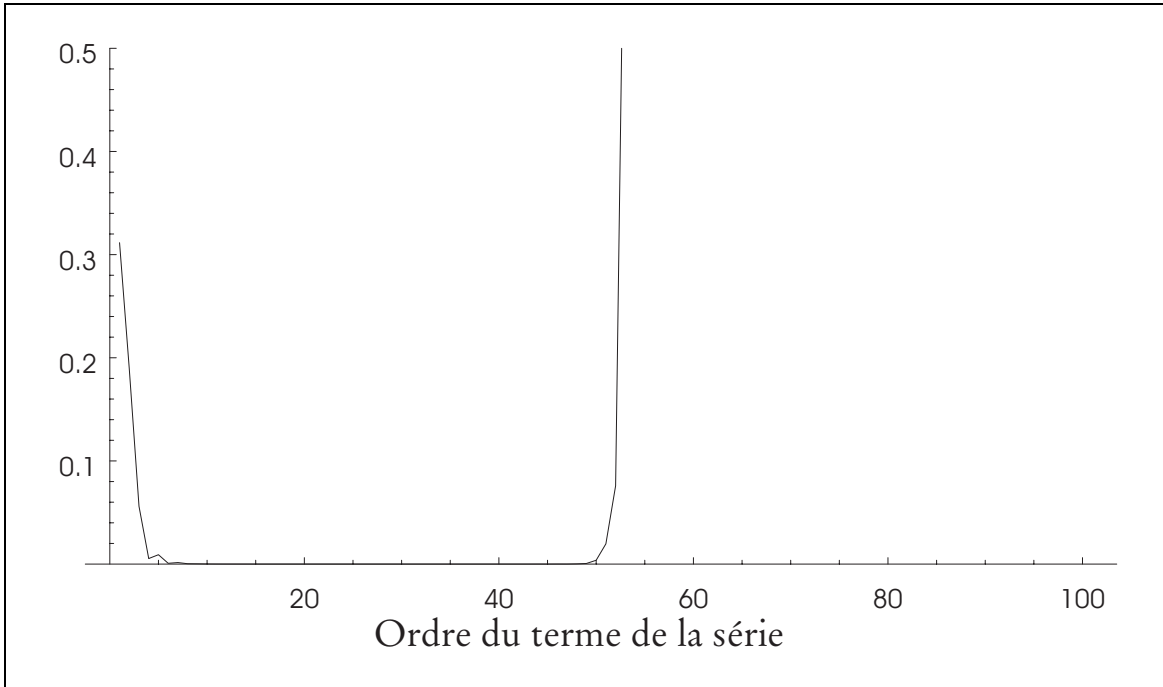
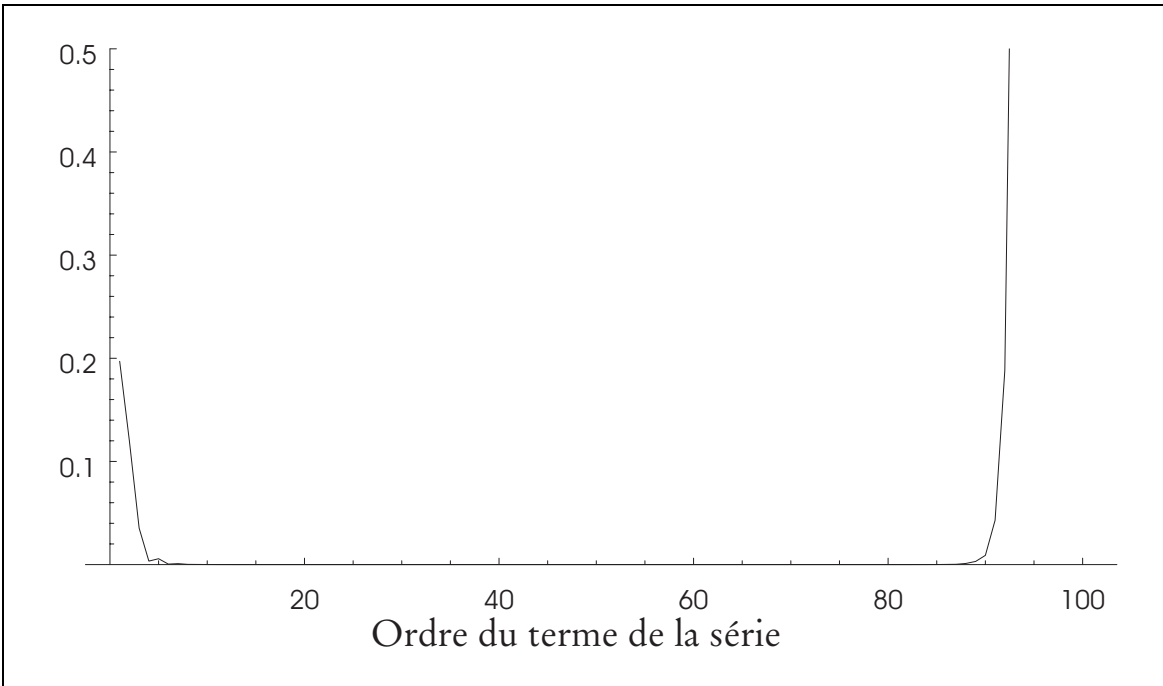


FIG. 3.12 – Source ponctuelle à proximité de l'interface

FIG. 3.13 – Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 10$

FIG. 3.14 – Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 20$ FIG. 3.15 – Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 50$

Les termes de la série 3.17b décroissent rapidement avec l'ordre, mais à partir d'un certain rang les termes de cette série divergent. La convergence de la série 3.17b n'a donc pas de sens en terme classique de convergence des séries. Cette série doit être considérée comme une série asymptotique [Bor28].

Sous un angle théorique, il est possible d'étudier cette série en cherchant un procédé de sommation pour la rendre convergente [Can93, Kog31]. Dans le cadre de cette thèse et en vue d'une utilisation numérique, nous allons tronquer cette série et considérer que la série tronquée à un ordre donné constitue une approximation du résultat réel.

Les figures 3.13, 3.14 et 3.15 nous montrent que le comportement divergent des termes de la série dépend du facteur kr_s relatif au point d'observation. Il est naturel de penser que la troncature optimale de la série doit se faire à un ordre qui dépendra de la valeur du facteur kr_s . Plus le facteur kr_s est important, plus la série 3.17b diverge à un ordre élevé. La série peut donc également être tronquée à un ordre élevé. Or un nombre important de termes dans la série tronquée signifie que le coefficient de réflexion $R(\theta)$ est correctement modélisé. Par conséquent, la méthode ne doit être employée qu'avec un facteur kr_s élevé. C'est à dire un observateur éloigné de l'image du point source ou un module de vecteur d'onde k élevé.

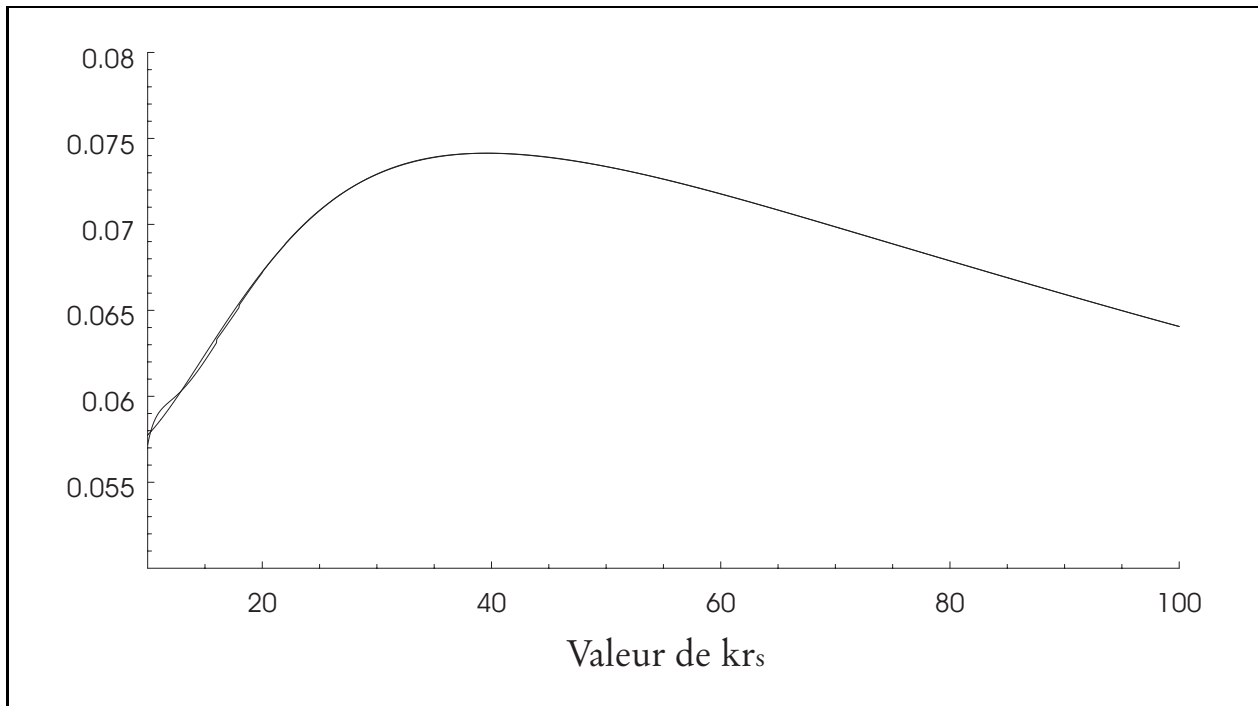
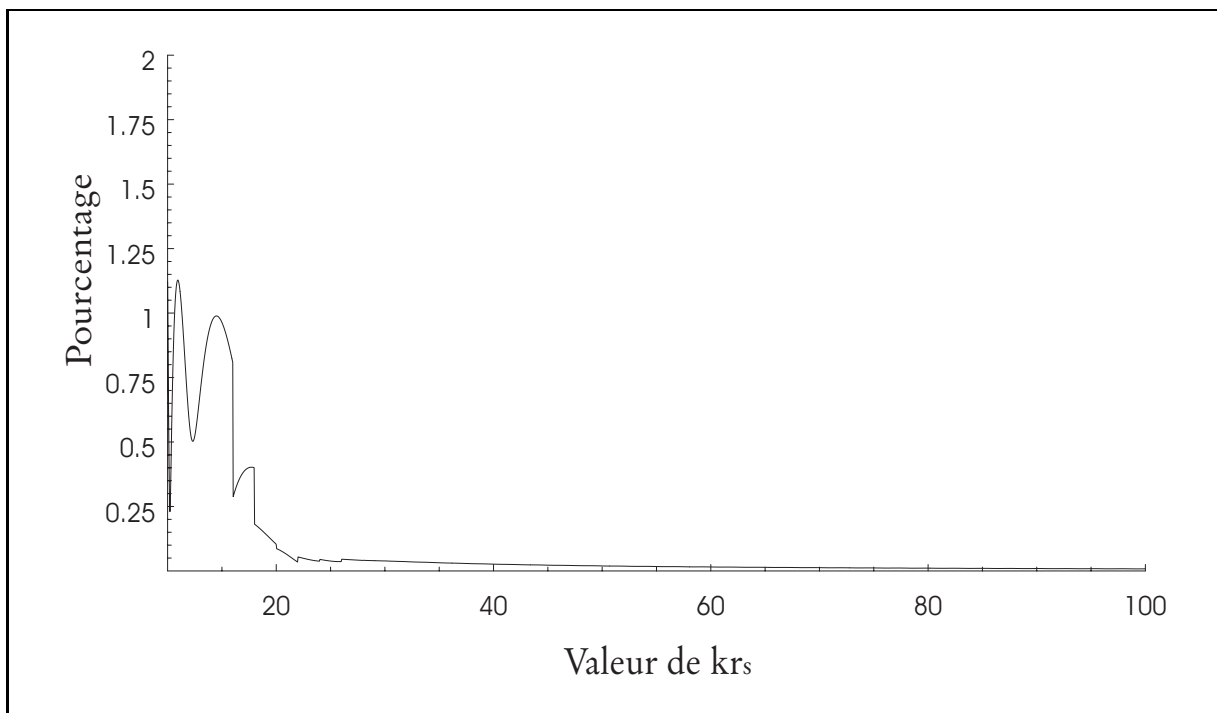
De plus, si le facteur kr_s est élevé, le terme $e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_s) \cos \theta_k)}$ dans l'intégrale 3.17a décroît, de façon exponentielle à un ordre élevé, le long des branches infinies du contour d'intégration. Cela limite grandement le problème de divergence de la série de Fourier 3.13 quand on s'éloigne de l'axe réel. Une analyse plus détaillée du problème de convergence des deux calculs est présentée en annexe, voir B.

On choisira arbitrairement de faire varier le point d'observation M de façon parallèle à l'interface et à une hauteur moitié par rapport au point source, voir figure 3.12. On choisira k de tel façon qu'en $x = 0$, on ait $kr_s = 10$ et x_{max} tel qu'en $x = x_{max}$, on ait $kr_s = 100$. La série 3.17b sera tronquée en prenant la partie entière de $kr_s/2$, mais en conservant un minimum de 7 termes. On constate que dans ces conditions, le calcul effectué par intégration 3.17a et par estimation de la série 3.17b donnent des résultats quasi identiques, voir figure 3.16.

La courbe 3.17 nous montre l'erreur err entre les deux calculs relativement à l'intégration. En prenant les notations établies aux équations 3.17a et 3.17b, on a

$$err = \frac{\|E_1(x, y) - E_2(x, y)\|}{\|E_1(x, y)\|}. \quad (3.18)$$

L'erreur relative maximale calculée est de l'ordre de 1% et devient négligeable quand kr_s est supérieur à 20. Le modèle de la fonction de Green sous forme de série semble donc parfaitement justifié dans les conditions précisées précédemment.

FIG. 3.16 – *Superposition des courbes obtenues par intégration et par estimation de la série*FIG. 3.17 – *Pourcentage de l'erreur relative entre les deux calculs*

3.2.2 Second cas

Le second cas que nous allons étudier correspond toujours à une interface fluide-fluide, voir figure 3.18. Et comme dans le premier cas, le milieu fluide du demi espace supérieur, respectivement inférieur, sera noté 1, respectivement 2.

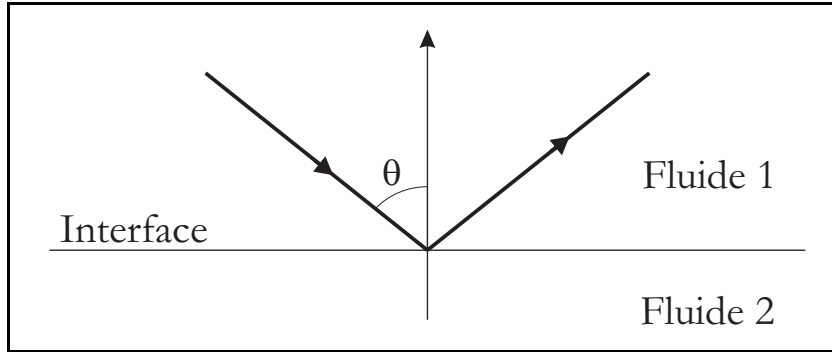


FIG. 3.18 – Réflexion de l'interface plane fluide-fluide

En revanche, le rôle des deux fluides sera interverti. Le milieu 1 sera composé d'eau et le milieu 2 sera le milieu sédimentaire.

L'expression générale du coefficient de réflexion fluide-fluide $R(\theta)$ reste bien évidemment valide :

$$R(\theta) = \frac{\rho_2/\rho_1 \cos \theta - \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}}{\rho_2/\rho_1 \cos \theta + \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}}, \quad (3.19)$$

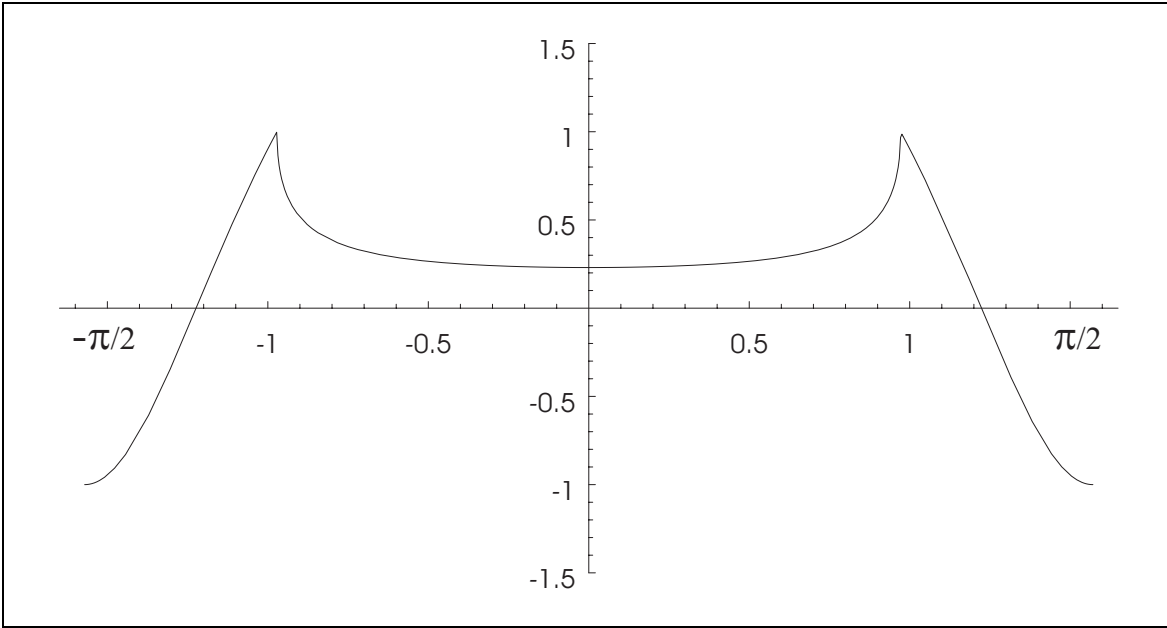
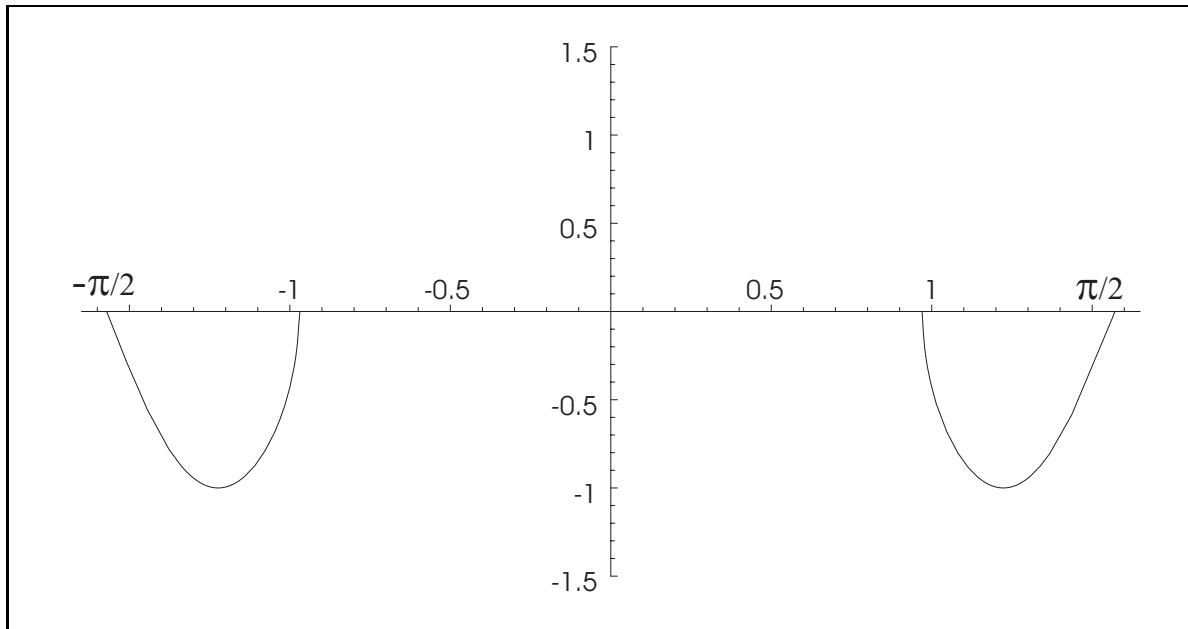
mais les valeurs numériques seront maintenant :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_1 &= 1470 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho_2 &= 1320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_2 &= 1780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Régularité de la fonction

Le principal changement par rapport au premier cas vient du fait que la vitesse de propagation de l'onde acoustique dans le milieu 1 est inférieure à celle du milieu 2. Le coefficient de réflexion fluide-fluide $R(\theta)$ pourra donc avoir une composante imaginaire sur l'axe réel quand θ varie entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, voir figures 3.19 et 3.20.

En effet, les quatre points de branchement de la fonction $R(\theta)$ se trouvent sur l'axe réel aux positions : $x_1 = -\pi + \arcsin(c_1/c_2)$, $x_2 = -\arcsin(c_1/c_2)$, $x_3 = \arcsin(c_1/c_2)$ et $x_4 = \pi - \arcsin(c_1/c_2)$, confère annexe A. Le coefficient de réflexion admet une partie imaginaire sur l'axe réel entre x_1 et x_2 , et entre x_3 et x_4 . Numériquement, on a : $x_1 \simeq -2.17$, $x_2 \simeq -0.97$, $x_3 \simeq 0.97$ et $x_4 \simeq 2.17$.

FIG. 3.19 – *Partie réelle du coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (second cas)*FIG. 3.20 – *Partie imaginaire du coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (second cas)*

Sur l'intervalle $[\pi/2, \pi/2 - I\infty[$, la norme du coefficient de réflexion décroît rapidement dès qu'on s'écarte de l'axe réel, voir figure 3.21. La prépondérance de l'intégration sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ est donc encore plus marquée que dans le premier fluide-fluide.

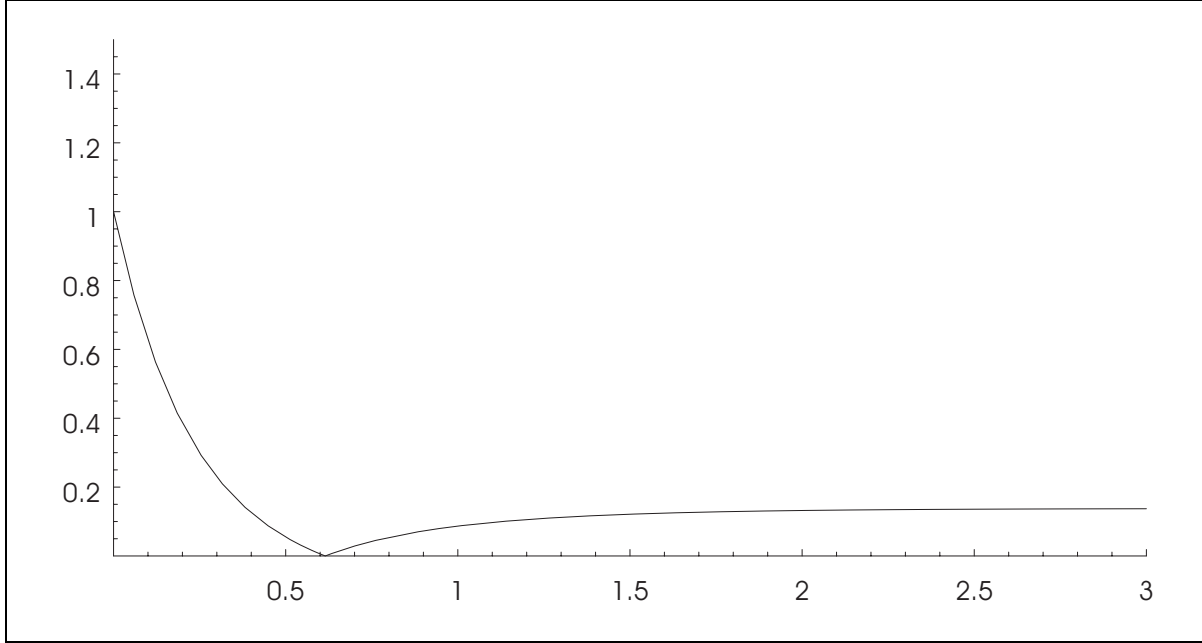


FIG. 3.21 – Norme du coefficient de réflexion fluide-fluide en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$ (second cas)

Dans le plan complexe, Le coefficient de réflexion $R(\theta)$ admet également deux pôles en $z = \pm \arccos \left[-\sqrt{\frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}} \right]$, confère annexe A. Numériquement, les pôles se situent en $z \simeq \pm (\pi/2 + I0.61)$, voir la vue globale sur la figure 3.8. Qualitativement, les pôles jouent des rôles comparables à ceux vu dans le premier cas. Leur influence sur l'irrégularité de la fonction $R(\theta)$ le long du contour de Sommerfeld reste limitée.

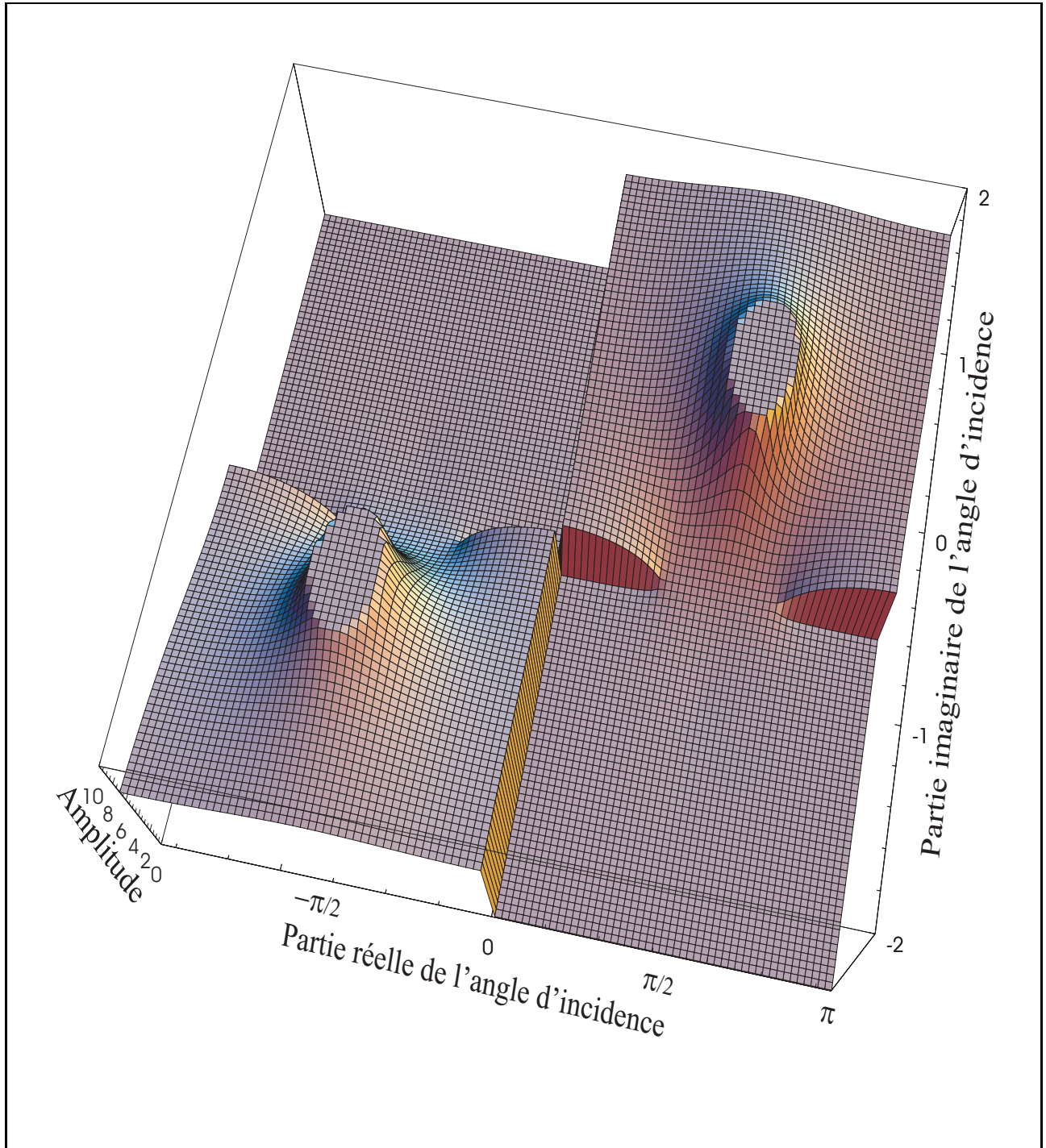


FIG. 3.22 – Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-fluide sur le plan complexe (second cas)

Approximation par la série de Fourier

De la même façon que pour le premier cas d'interface fluide-fluide, nous allons considérer la fonction $RFourier(\theta)$ sur le plan complexe, tel que :

$$RFourier(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{im\theta}, \quad (3.21)$$

avec $R_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(x) e^{-imx} dx$. Et nous reprendrons la notation précédente $RFourier_N(\theta)$, la fonction issue de la troncature à l'ordre N de la série 3.21.

La figure 3.23 nous montre que comparativement au premier cas fluide-fluide 3.9, la décroissance des coefficients de Fourier s'effectue de manière sensiblement moins rapide. En ce sens, on peut qualifier la fonction $R(\theta)$ de moins régulière. Le calcul de ces coefficients se faisant sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on peut souligner l'action «perturbatrice» des points de branchement.

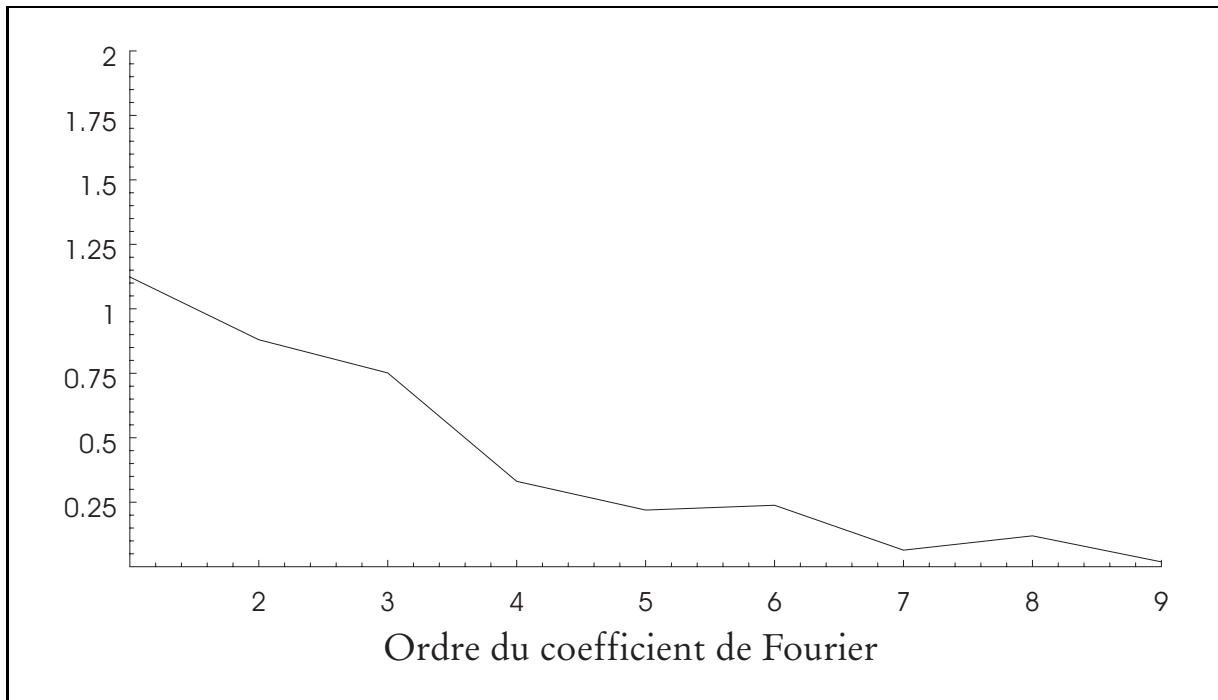


FIG. 3.23 – Norme des coefficients de la série de Fourier en fonction de leur ordre

De la même façon que pour le premier cas, nous allons tronquer la série 3.21 à l'ordre 10 et considérer $RFourier_{10}$. Comme conséquence directe de la perte de régularité de $R(\theta)$, dans le second cas d'interface fluide-fluide, on constate une moins bonne convergence sur l'axe réel, voir figure 3.24. Afin de confirmer le rôle perturbateur des points de branchement, on vérifie que l'erreur maximale se situe en ces points.

Une décroissance moins rapide des coefficients de Fourier entraîne une diminution du domaine de convergence de la série $RFourier$. La figure 3.25 nous montre ainsi une croissance exponentielle de l'erreur dès qu'on a une partie imaginaire non nulle pour l'angle d'incidence. Ceci laisse penser que la largeur de la bande de convergence est extrêmement réduite.

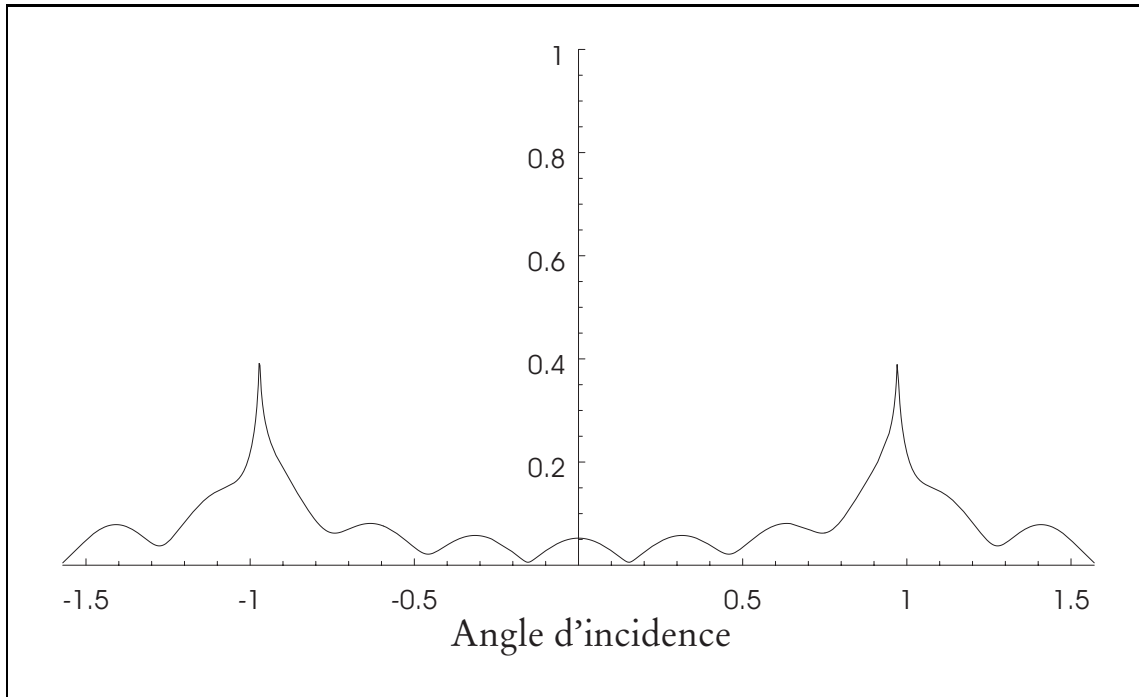


FIG. 3.24 – Norme de $R_{\text{Fourier}_{10}}(\theta) - R(\theta)$ entre $-\pi/2$ et $\pi/2$

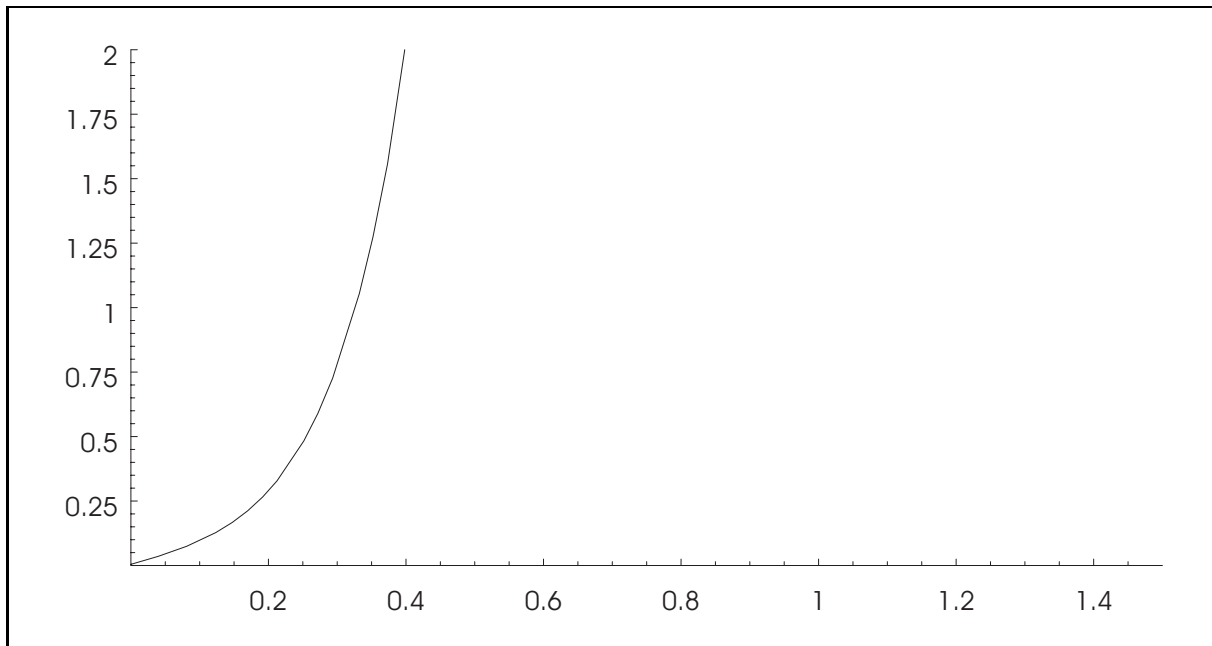


FIG. 3.25 – Norme de $R_{\text{Fourier}_{10}}(\theta) - R(\theta)$ en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$

Estimation de la fonction de Green

Afin de juger des conséquences d'une moins bonne convergence de la série et donc d'une plus grande erreur de modélisation, nous allons à nouveau comparer les deux expressions :

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_S) \cos \theta_k)} d\theta_k, \quad (3.22a)$$

$$E_2(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p i^p \Psi_p^s. \quad (3.22b)$$

L'importance de cette majoration de l'erreur du modèle sera alors relative à un calcul effectif de champ physique élémentaire.

Au vue des figures 3.26, 3.27 et 3.28, on s'aperçoit que la nature de la série 3.22b est la même dans le premier et dans le second cas. Néanmoins, il est notable que, dans le second cas, la divergence rapide des termes de la série s'effectue à un ordre beaucoup plus faible que celui obtenu dans le premier cas. Par exemple, pour un facteur $kr_s = 50$, les termes de la série commencent à diverger aux alentours de l'ordre 60, alors que, dans le premier cas, cette divergence n'était visible qu'au delà de l'ordre 90. De plus, les premiers termes de la série ne décroissent pas aussi rapidement qu'auparavant et la troncature de la série devient moins évidente, voir en particulier la figure 3.26.

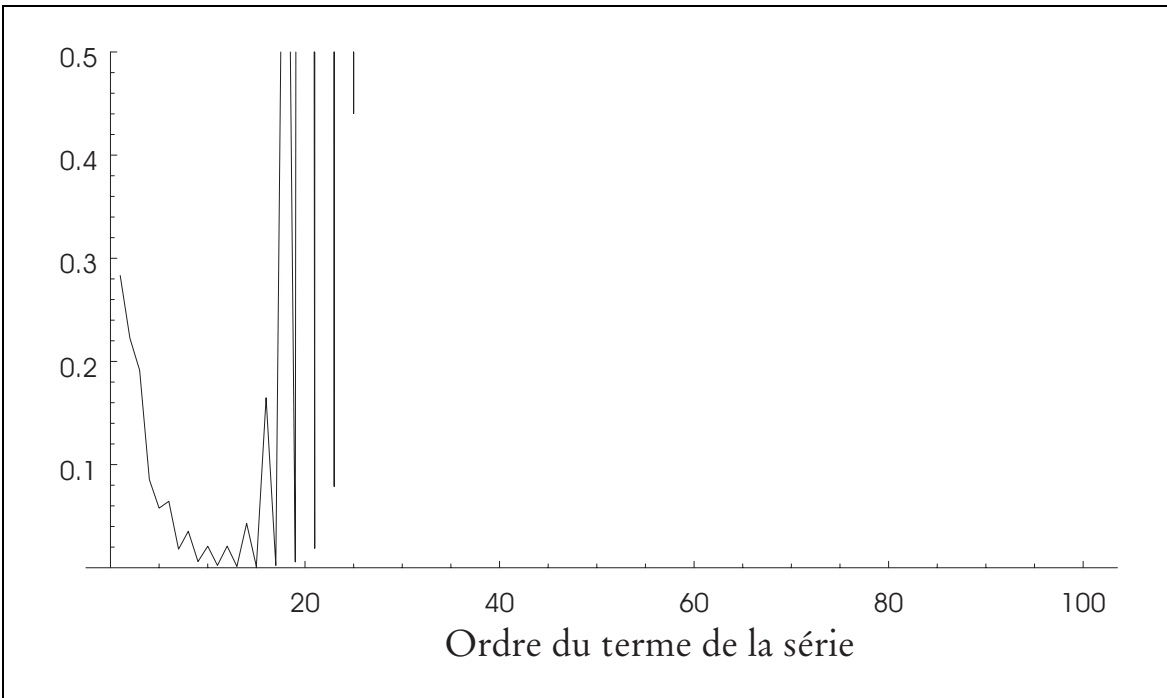
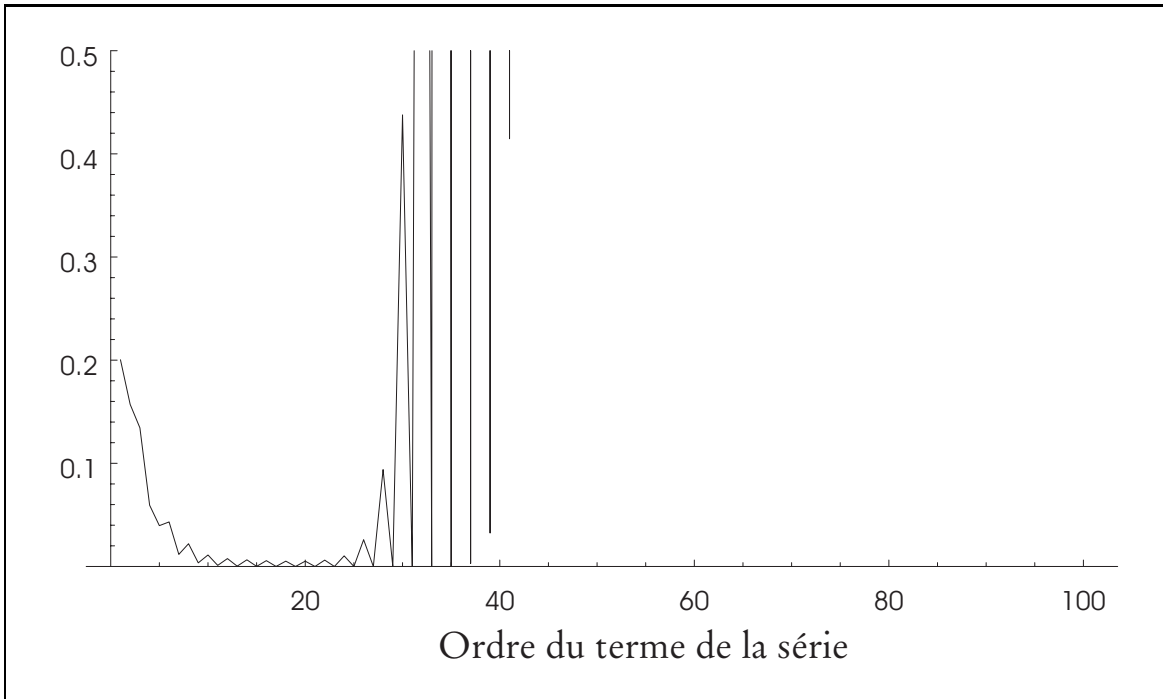
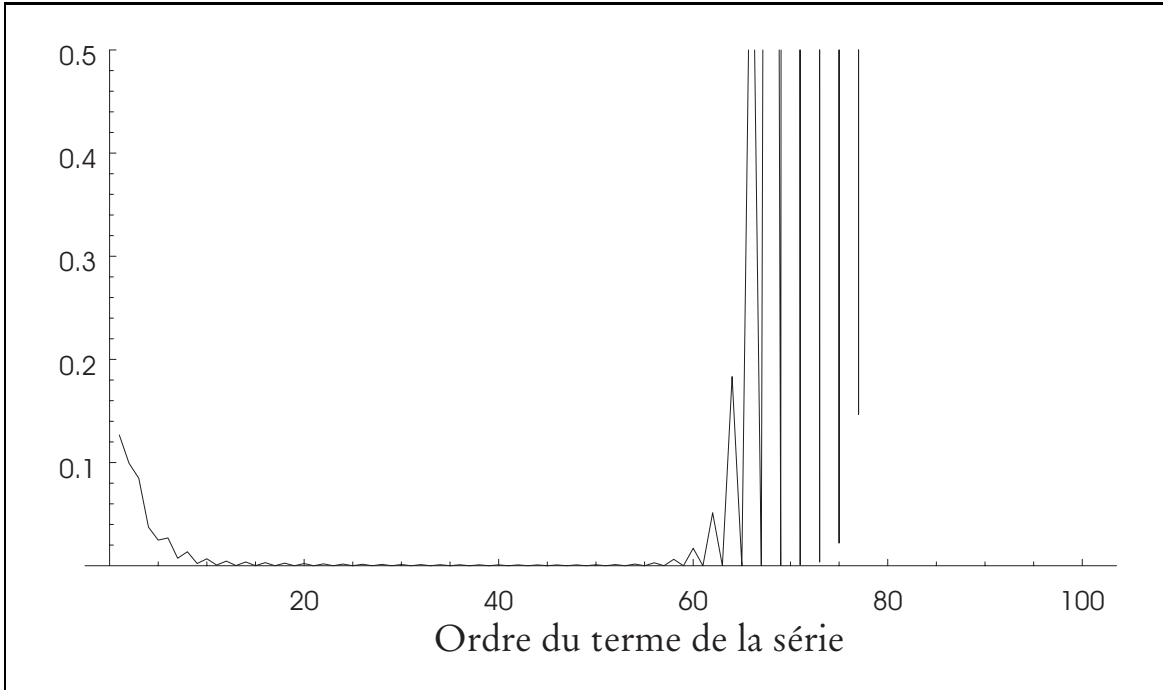


FIG. 3.26 – Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 10$

FIG. 3.27 – Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 20$ FIG. 3.28 – Modules des termes de la série 3.17b pour $kr_s = 50$

La position géographique du point d'observation M et les paramètres de calcul sont les mêmes que ceux donnés dans le premier cas.

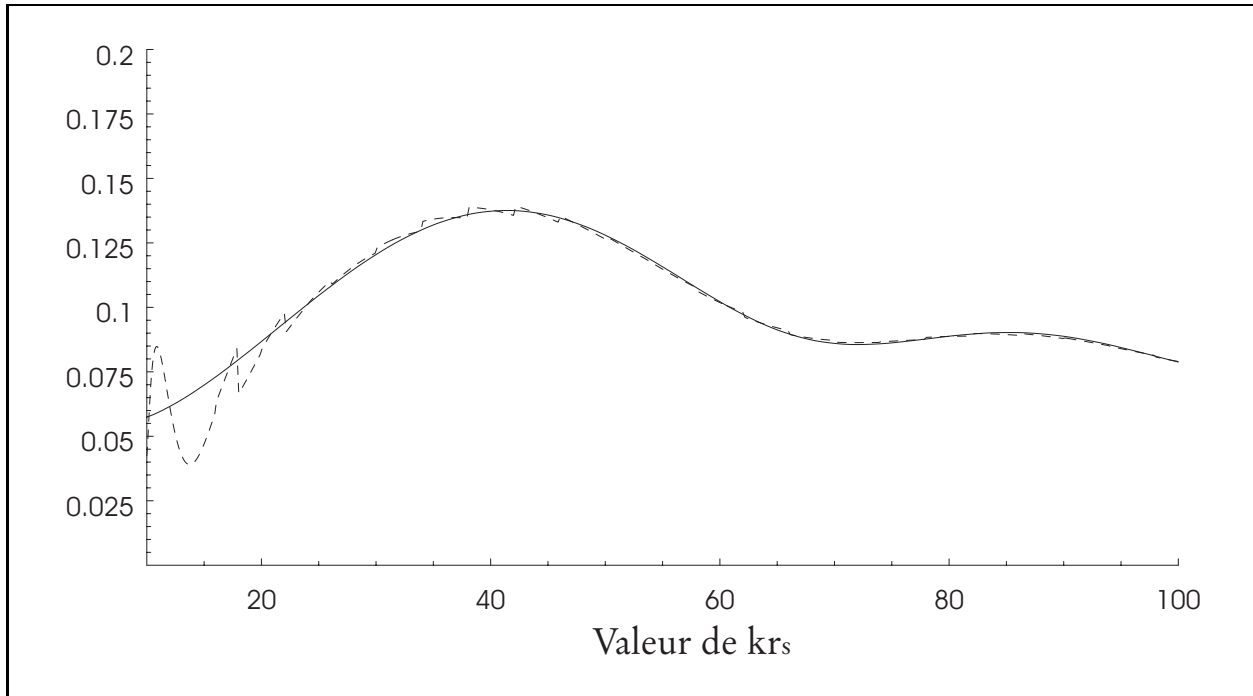


FIG. 3.29 – *Superposition des courbes obtenues par intégration (trait continu) et par estimation de la série (trait discontinu)*

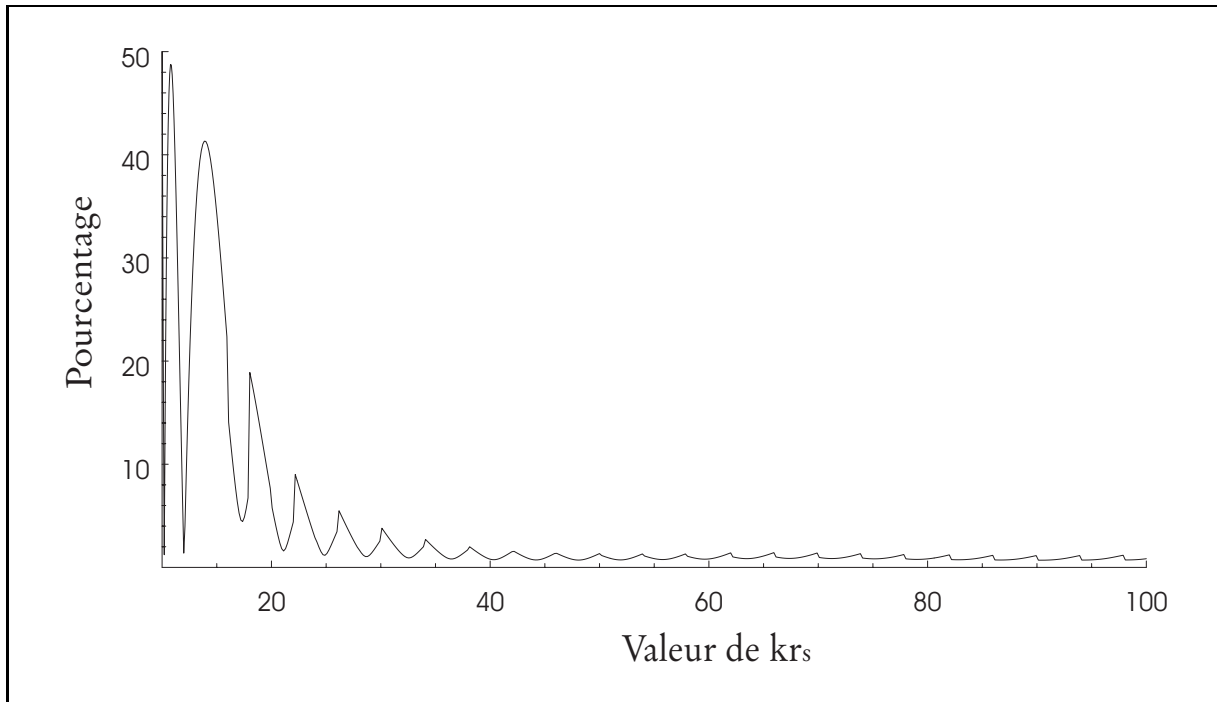
D'après le graphique 3.29, il est clair que le modèle sous forme de série est inexploitable quand kr_s n'est pas grand.

La première explication qui peut être avancée, est que, étant donné la relative lenteur de la convergence de la série de Fourier sur l'axe réel, la troncature de la série 3.17b, réduite à quelques termes quand kr_s est faible, rend le modèle peu précis. Cette explication suffirait si le modèle convergerait avec une erreur infinitésimale à kr_s élevé. Or la figure 3.30 nous montre que l'erreur relative du modèle reste de l'ordre de 1% à $kr_s = 100$.

Une seconde explication complémentaire est la largeur de la bande de convergence de la série sur le plan complexe, qui est très faible dans le cas présent. La série de Fourier décrit moins bien le coefficient de réflexion sur les branches d'intégration infinies.

Les deux explications, relative lenteur de la décroissance de la série de Fourier et petite bande de convergence, sont bien évidemment étroitement liées.

Ici, le modèle ne peut absolument pas être utilisé en champ proche. En revanche, l'exploitation en champ lointain garantit une erreur de modélisation très acceptable (moins de 1% à $kr_s = 400$).

FIG. 3.30 – *Pourcentage de l'erreur relative entre les deux calculs*

3.2.3 Influence de l'absorption

Le second cas d'interface fluide-fluide présente un coefficient de réflexion plus irrégulier au sens de la convergence de la série de Fourier. Un moyen possible pour tenter de «régulariser» cette fonction est de tenir compte de l'absorption des milieux. Nous allons introduire ici une certaine absorption en utilisant l'approximation de Brekhovskikh. C'est à dire en remplaçant dans la formulation du coefficient de réflexion fluide-fluide le rapport c_1/c_2 par $c_1/c_2 + I \cdot abscoef$, le coefficient d'absorption *abscoef* devant rester raisonnable.

Régularité de la fonction

En reprenant les valeurs numériques du second cas d'interface fluide-fluide et en introduisant un coefficient d'absorption $abscoef = 0.1$, on modifie considérablement la nature de la fonction $R(\theta)$. En particulier, les points de branchement ne sont plus situés sur l'axe réel. Comme l'illustre les figures 3.31 et 3.32, le coefficient de réflexion devient différentiable en tout point de l'axe réel. La fonction devient même holomorphe autour de l'axe réel sur une bande de largeur constante, voir figure 3.33. En ce sens, le gain de régularité du coefficient de réflexion est patent.

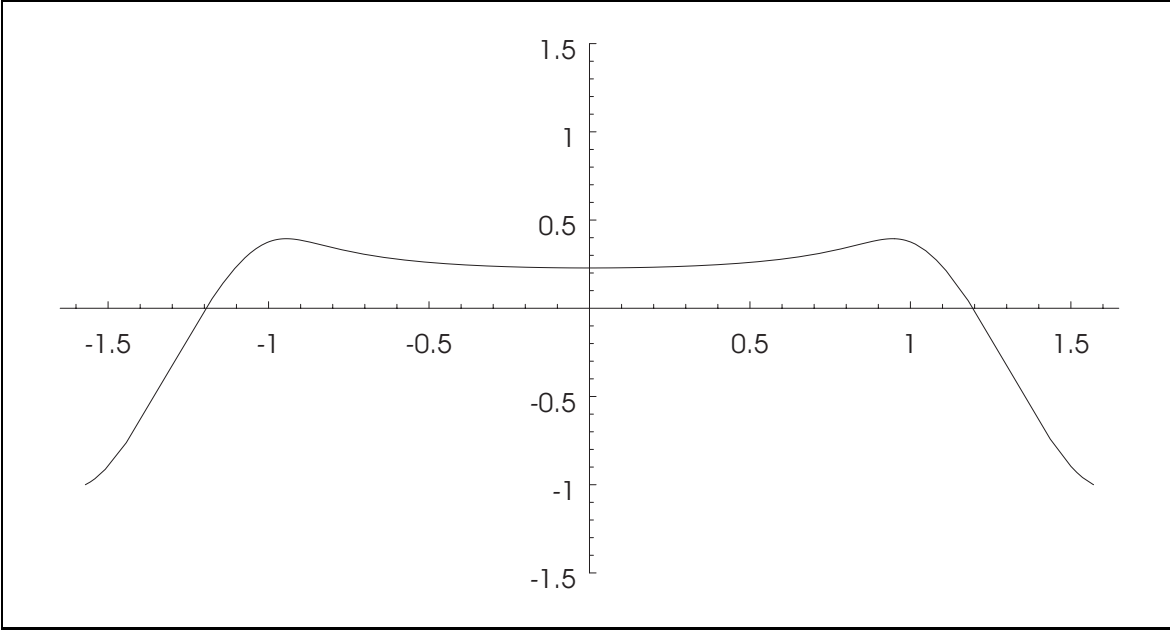


FIG. 3.31 – *Partie réelle du coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (second cas avec absorption)*

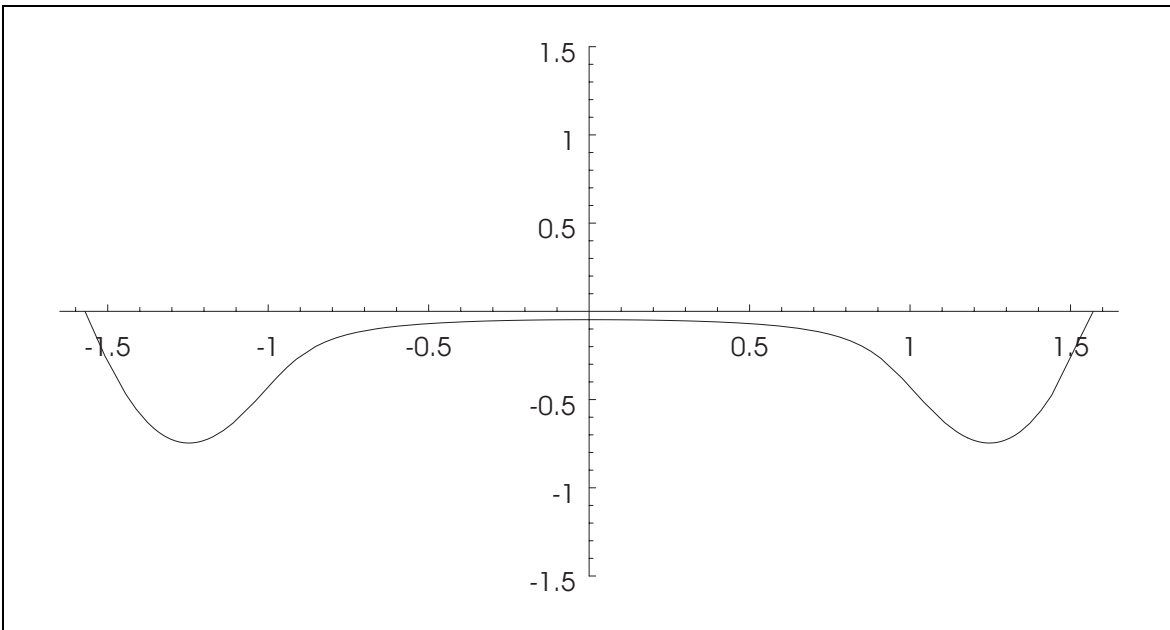


FIG. 3.32 – *Partie imaginaire du coefficient de réflexion fluide-fluide entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (second cas avec absorption)*

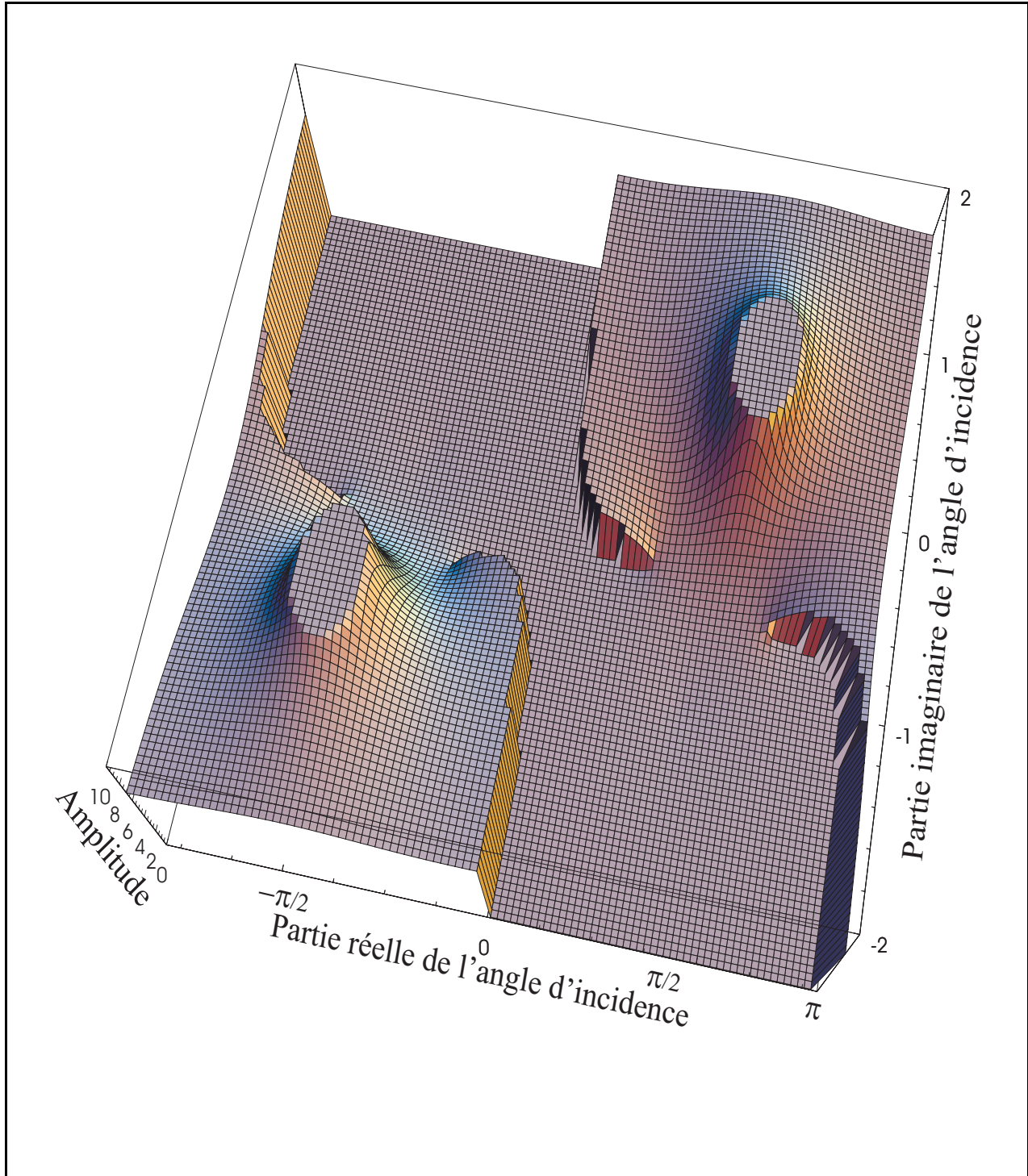


FIG. 3.33 – Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-fluide sur le plan complexe (second cas avec absorption)

Approximation par la série de Fourier

Certes, la figure 3.34, nous montre que l'introduction de l'absorption améliore la décroissance des coefficients de Fourier, mais la comparaison entre les courbes de cette figure peut être difficilement interprétée. On peut en effet constater qu'aux ordres impairs, la valeur de ce coefficient ne semble pas significativement différente avec et sans absorption.

En revanche, la figure 3.35, qui affiche l'écart de la série avec le coefficient de réflexion sur les branches infinies, indique une nette atténuation de l'erreur commise.

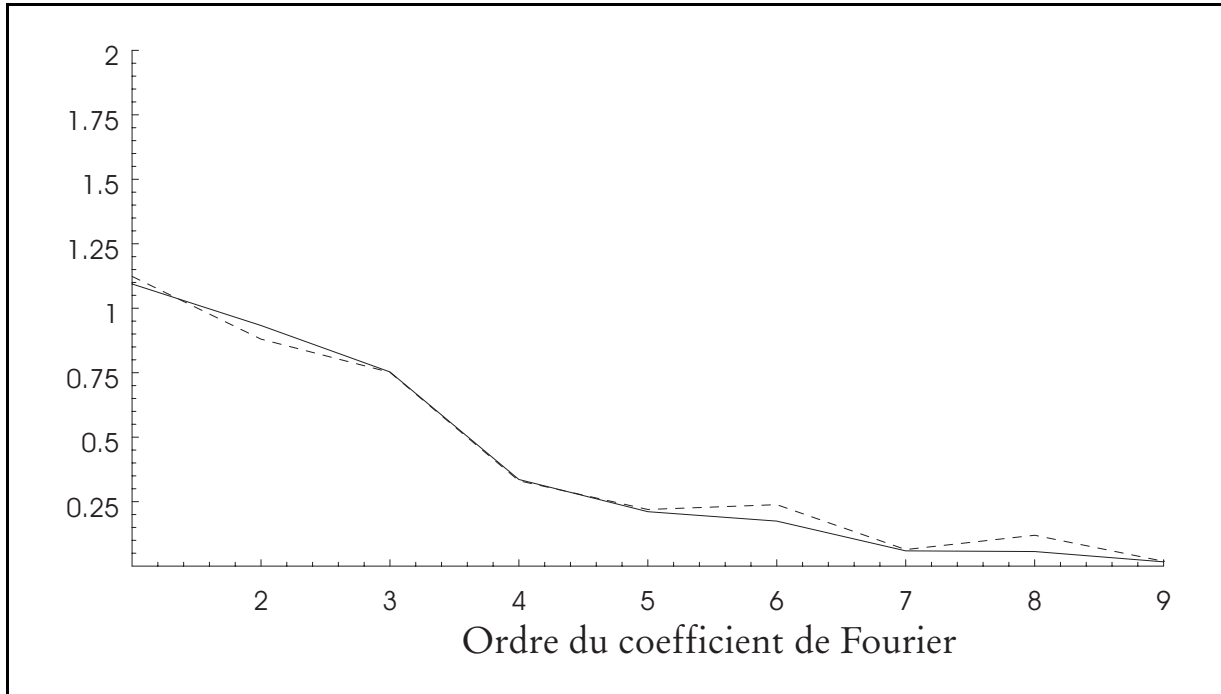


FIG. 3.34 – Norme des coefficients de la série de Fourier en fonction de leur ordre avec absorption (trait continu) et sans absorption (trait discontinu)

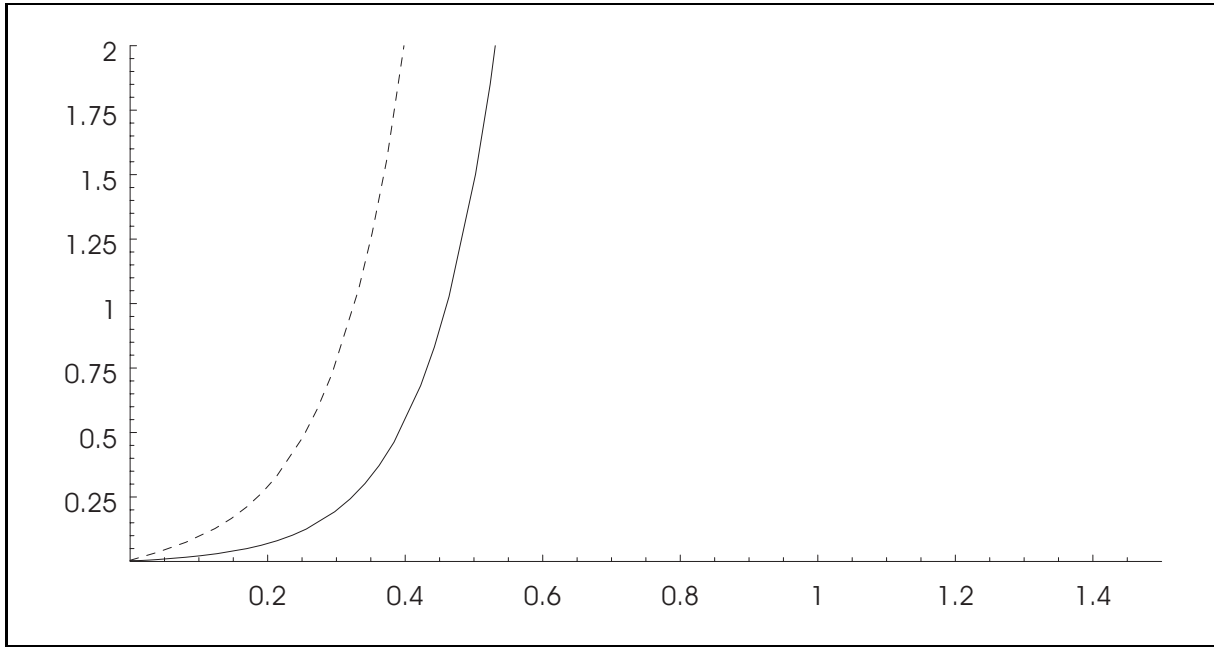


FIG. 3.35 – Norme de $R_{\text{Fourier}}_{10}(\theta) - R(\theta)$ en fonction de x tel que $\theta = \pi/2 - I * x$ avec absorption (trait continu) et sans absorption (trait discontinu)

Estimation de la fonction de Green

Si la figure 3.34 indique une amélioration très modeste de la convergence, et la figure 3.35 une amélioration tout de même marquée, seule l'estimation de la fonction de Green, et donc des expressions 3.23a et 3.23b, peut nous permettre d'évaluer l'impact réel de l'absorption sur le modèle.

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_S) \cos \theta_k)} d\theta_k, \quad (3.23a)$$

$$E_2(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p i^p \Psi_p^s, \quad (3.23b)$$

Ces calculs étant faits, on constate que l'erreur relative maximale a été divisée par plus de 2 et qu'avec une erreur inférieure à 20%, le calcul sous forme de série offre une modélisation assez grossière mais acceptable dans certains cas en champ proche. En champ plus lointain, l'erreur est négligeable.

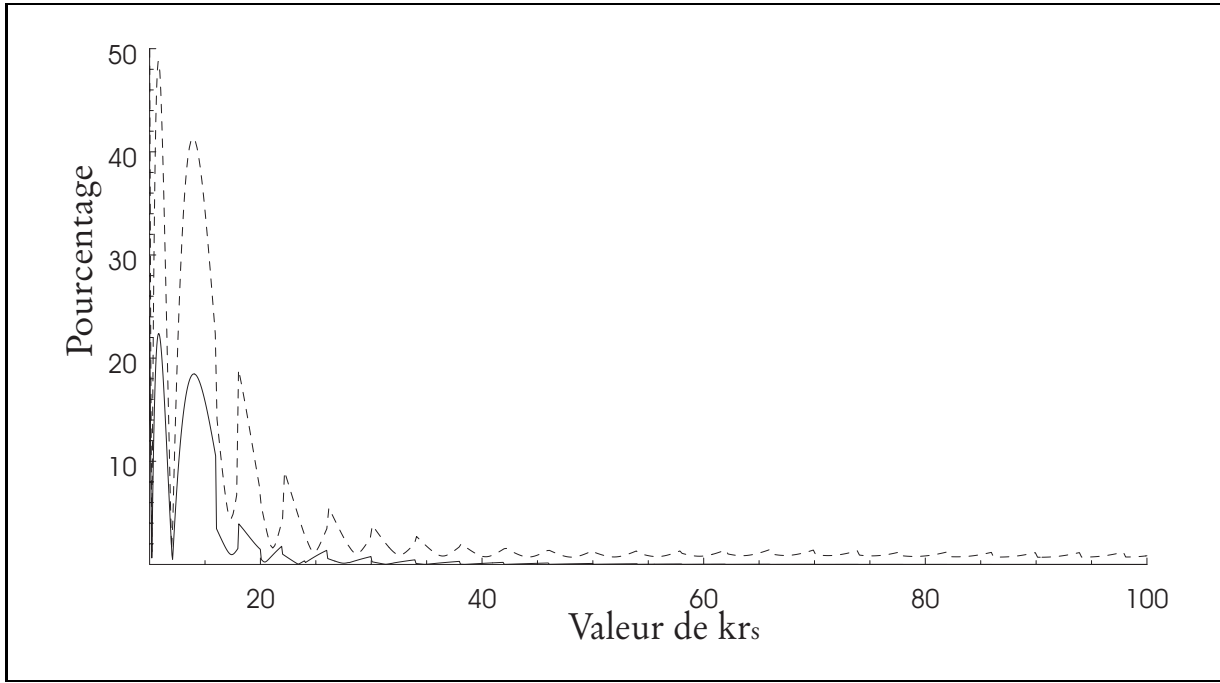


FIG. 3.36 – Pourcentage de l'erreur relative entre les deux calculs avec absorption (trait continu) et sans absorption (trait discontinu)

3.3 interface fluide-solide

Nous considérons maintenant une interface fluide(demi espace supérieur noté 1)-solide(demi espace inférieur noté 2). L'expression théorique du coefficient de réflexion $R(\theta)$ associé à cette interface est :

$$R(\theta) = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \theta \left(\left(\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - 2 \sin^2 \theta \right)^2 + 4 \sin^2 \theta \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \right) - \left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^4 \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \theta \left(\left(\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - 2 \sin^2 \theta \right)^2 + 4 \sin^2 \theta \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \right) + \left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^4 \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta}} \quad (3.24)$$

$\{c_{L2}, c_{T2}, \rho_2\}$ étant respectivement la vitesse de propagation de l'onde longitudinale et transversale dans le solide et sa masse volumique.

On rappelle que $c_{L2}/c_1 \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta}$ et $c_{T2}/c_1 \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^2 - \sin^2 \theta}$ correspondent aux cosinus des angles de propagation des ondes longitudinales et transversales réfractées. La fonction racine carré devra donc être considérée dans le feuillet qui vérifie la condition de Sommerfeld associée à ces ondes.

Les valeurs numériques seront fixées à :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_1 &= 1470 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho_2 &= 2790 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_{L2} &= 6557 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, & c_{T2} &= 3128 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

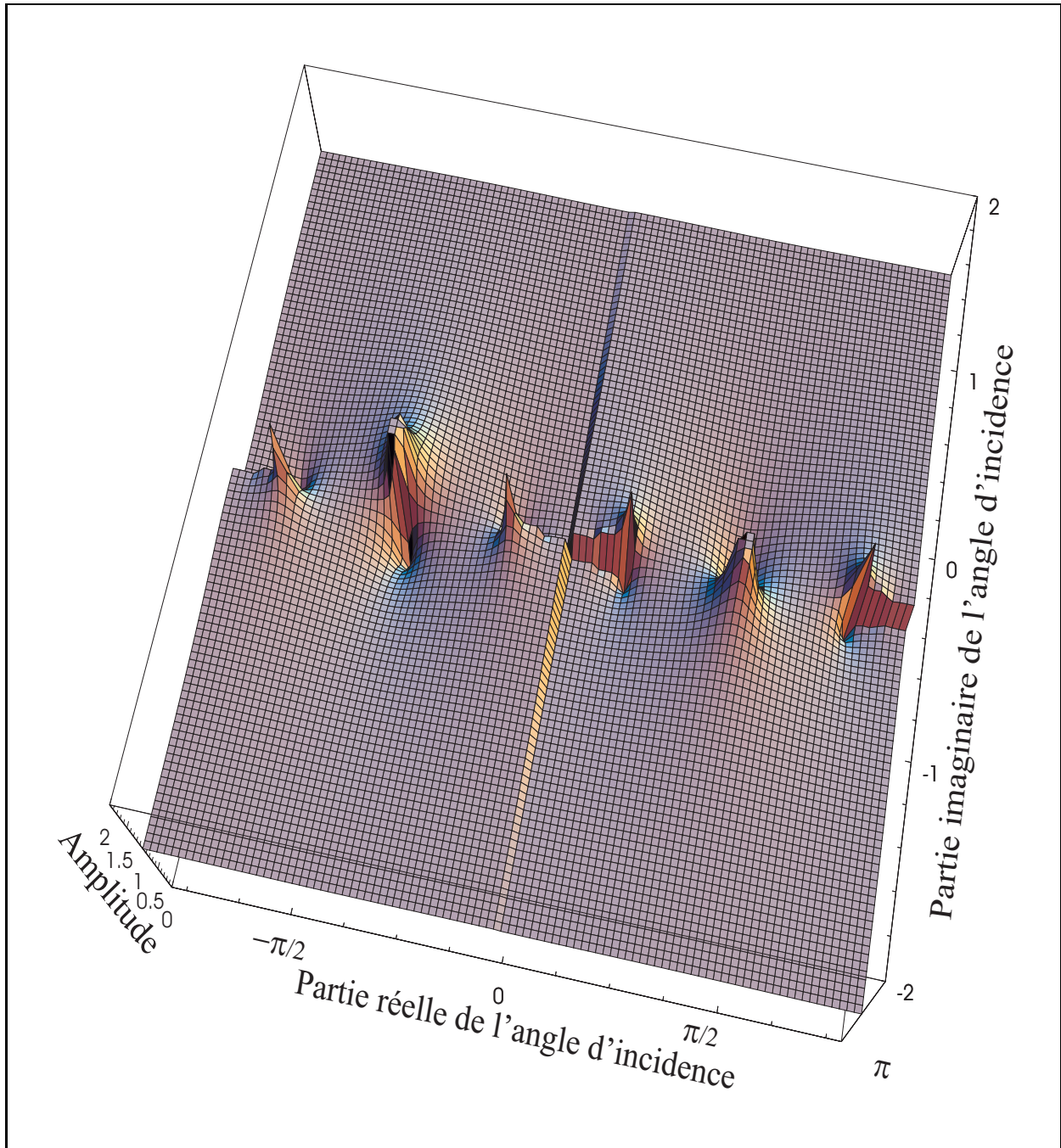


FIG. 3.37 – Vue globale de la norme du coefficient de réflexion fluide-solide sur le plan complexe

Précédemment, nous avons vu que le passage du premier cas d'interface fluide-fluide au second avait profondément modifié les performances numériques de la modélisation. La présence dans le second cas des points de branchement sur l'axe réel avait considérablement dégradé ces performances. Dans le cas présent, les vitesses c_{L2} et c_{T2} sont supérieures à c_1 et cela engendre la présence de 8 points de branchements sur l'axe réel, voir annexe A. La figure 3.37 nous montre que les pôles se trouvent proches de l'axe réel et sur le contour de Sommerfeld. Dans ces conditions, il est clair que la modélisation par la méthode des images généralisée donnera de mauvais résultats.

La figure 3.38 affiche la norme des 30 (non plus des 10 comme précédemment) premiers coefficients de Fourier associés à $R(\theta)$ et confirme que ces coefficients décroissent extrêmement lentement. Le rayon de convergence de la série est donc quasi nul.

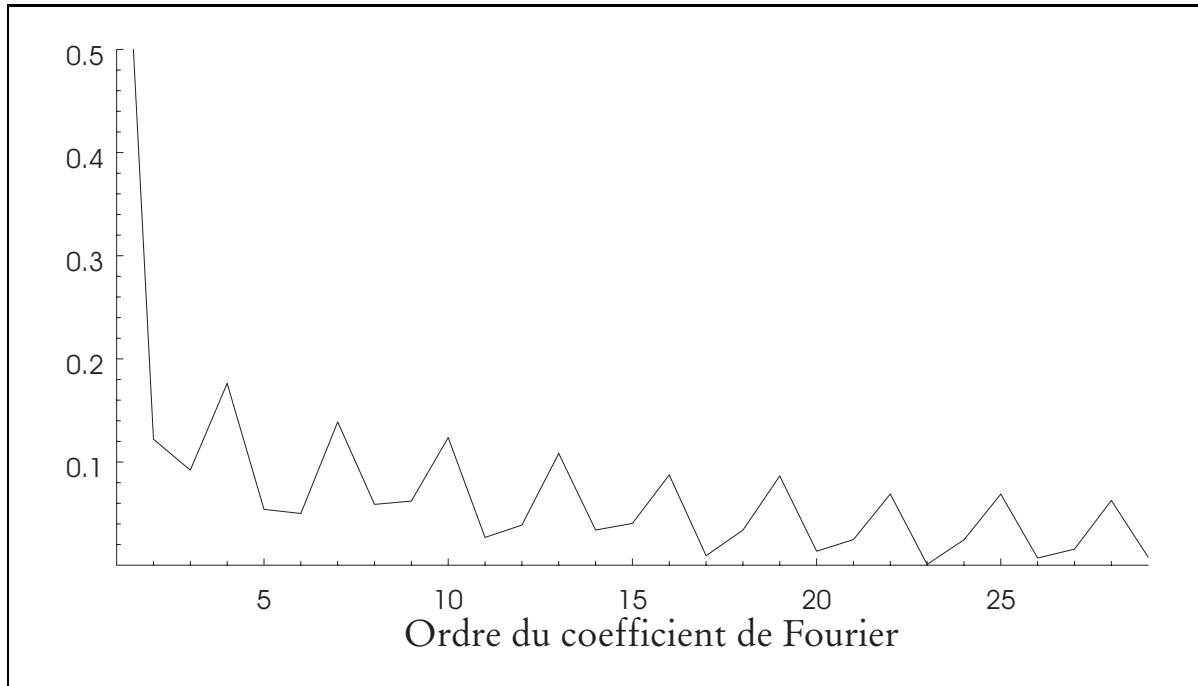


FIG. 3.38 – Norme des coefficients de la série de Fourier en fonction de leur ordre

Estimation de la fonction de Green

La comparaison avec l'expression de la fonction de Green sous forme intégrale doit, ici, s'effectuer en prenant une précaution particulière par rapport au cas fluide-fluide. En effet, afin de tenir compte de la présence de pôles, le contour de Sommerfeld numérique doit être déformé, voir le schéma 3.39.

Quoi qu'il en soit, la figure 3.40 démontre que la méthode des images généralisée ne converge pas même en champ lointain. Les interfaces fluide-solide sortent donc du cadre de cette étude numérique.

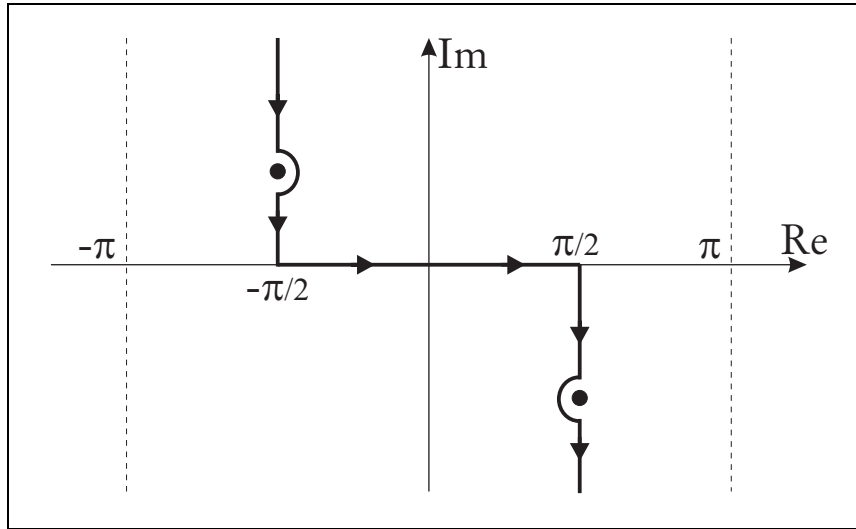


FIG. 3.39 – Contour de Sommerfeld d'intégration numérique en tenant compte de la présence de pôles

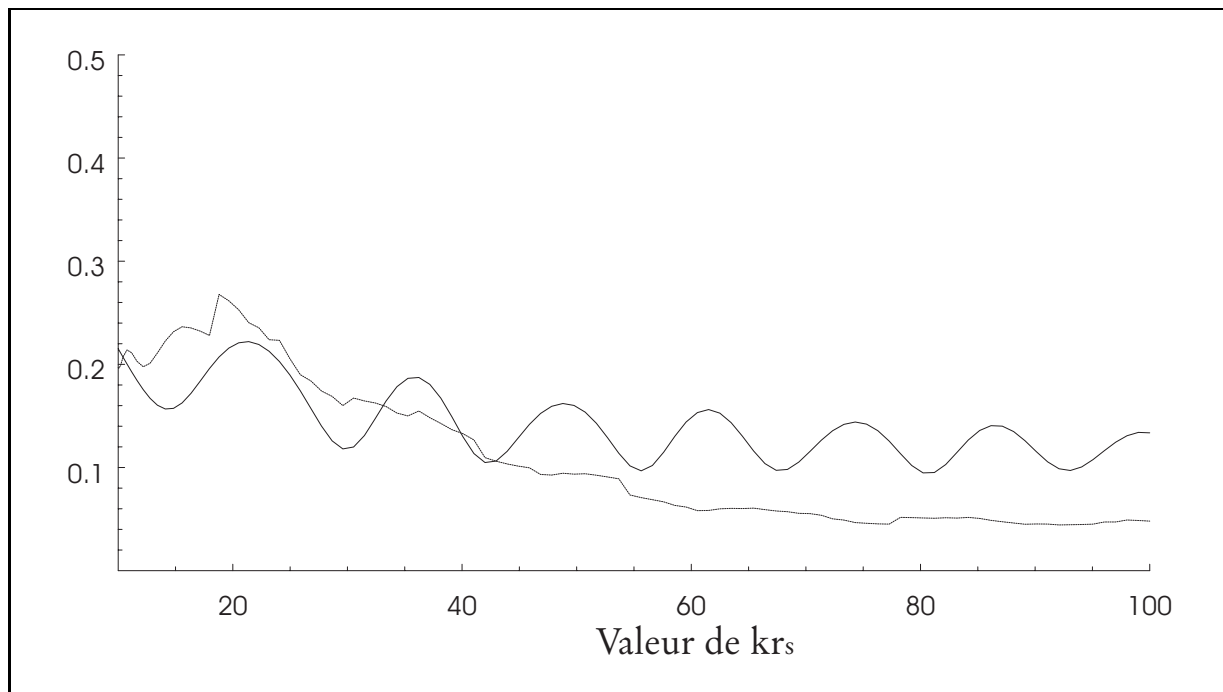


FIG. 3.40 – Superposition des courbes obtenues par intégration (trait continu) et par estimation de la série (trait discontinu)

3.4 Synthèse

Ce chapitre a présenté de façon détaillée les principaux cas d'interfaces rencontrées en physique. Nous avons établi que seules les interfaces fluide-fluide ou ayant un coefficient de réflexion suffisamment régulier pouvaient être numériquement évaluées par la méthode des images généralisée. D'un point de vue numérique, la théorie définie dans cette thèse peut être considérée comme une méthode de perturbation relative aux cas d'interfaces rigides ou molles.

Ce chapitre a également permis de mettre en évidence les critères qui établissent la convergence numérique de la méthode (décroissance de la norme des coefficients de Fourier, écart entre la série tronquée et le coefficient de réflexion sur les branches infinies,...). Connaissant ces critères, on peut, a priori, avoir une idée de l'erreur commise lors d'un calcul physique en champ proche et lointain.

L'importance de la présence et de la position des points singuliers du coefficient de réflexion dans le plan complexe a été aussi clairement soulignée.

Cette analyse est, en fait, un préalable à l'exploitation numérique dans des configurations plus complexes qu'un champ élémentaire, comme, par exemple, l'estimation numérique du champ acoustique diffusé par un cylindre à proximité d'une interface. Ceci sera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Cylindre à proximité d'une interface plane (étude numérique)

Introduction

L'objectif du chapitre précédent a été de justifier la modélisation de la réflexion locale par l'interface plane, ou du moins de définir le cadre d'emploi de cette modélisation. L'étude ainsi conduite a permis de préciser la nature de l'interface envisageable, pour les applications numériques de la théorie des images généralisée.

Au cours de ce chapitre, nous chercherons, d'une part, à valider le modèle global d'interaction entre le cylindre et l'interface, et, d'autre part, à expliquer physiquement cette interaction. La comparaison entre la méthode des images généralisée et la théorie des rayons permettra d'atteindre cette double finalité.

Numériquement, nous nous placerons dans le cas le plus favorable en ce qui concerne l'interface plane. C'est à dire que nous prendrons les données numériques correspondant au premier cas d'interface fluide-fluide décrite au chapitre précédent. Le cylindre étudié ici sera principalement le cylindre à section circulaire rigide, car sa modélisation est suffisamment simple pour permettre des interprétations physiques claires.

Dans une première partie, nous comparerons la théorie de rayons avec la méthode des images généralisée pour un observateur situé entre l'interface et le cylindre.

Une deuxième partie sera consacrée à l'interprétation en terme de rayons des champs calculés pour un observateur situé au dessus du cylindre.

La troisième partie traitera le cas du cylindre élastique introduit au premier chapitre, voir 1.2.1.

4.1 Analyse harmonique

Dans un premier temps, nous choisirons d'étudier la diffusion vue par un observateur M situé entre le cylindre et l'interface, voir schéma 4.1. L'abscisse de l'observateur sera la même que le centre du cylindre et son ordonnée notée $h2$ sera comprise entre 0 et $h1 - a$. L'onde plane incidente sera normale au cylindre et parallèle à l'interface. On choisira également une onde plane unitaire et monochromatique.

D'un point de vue numérique, on fixera l'ordonnée du centre du cylindre et la fréquence de l'onde plane telles que :

$$h1 = \frac{3}{2} a , \quad (4.1a)$$

$$ka = 20 . \quad (4.1b)$$

Physiquement, l'observateur M ne peut pas percevoir directement l'onde plane incidente. Il perçoit en réalité le rayonnement des ondes de surface se propageant sur le cylindre, soit directement, soit après réflexion(s) sur l'interface. En termes de rayons, nous pouvons décomposer le rayonnement reçu par l'observateur M en six rayons principaux distincts. La sélection de ces rayons a été établie en s'inspirant des travaux réalisés sur l'influence mutuelle de deux cylindres parallèles [Khe95].

Compte tenu de la symétrie de la configuration par rapport à l'axe Oy et de la position de l'observateur sur cet axe, on peut regrouper ces six rayons deux par deux. La figure 4.2 représente le parcours des trois rayons situés à droite du cylindre. Pour l'observateur M , l'influence du rayon équivalent passant par la gauche du cylindre est absolument identique à l'influence des rayons passant par la droite. Dans la suite du chapitre nous considérerons, pour cet observateur, uniquement les trois rayons passant à droite, ceux passant par la gauche du cylindre étant déduits par symétrie.

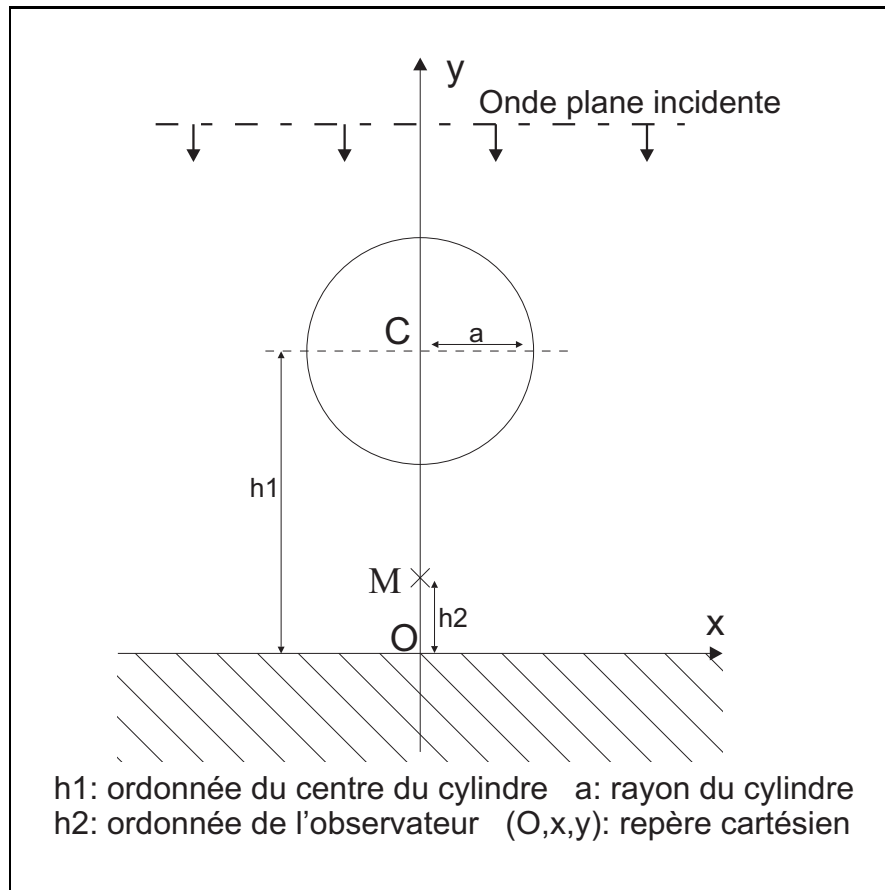
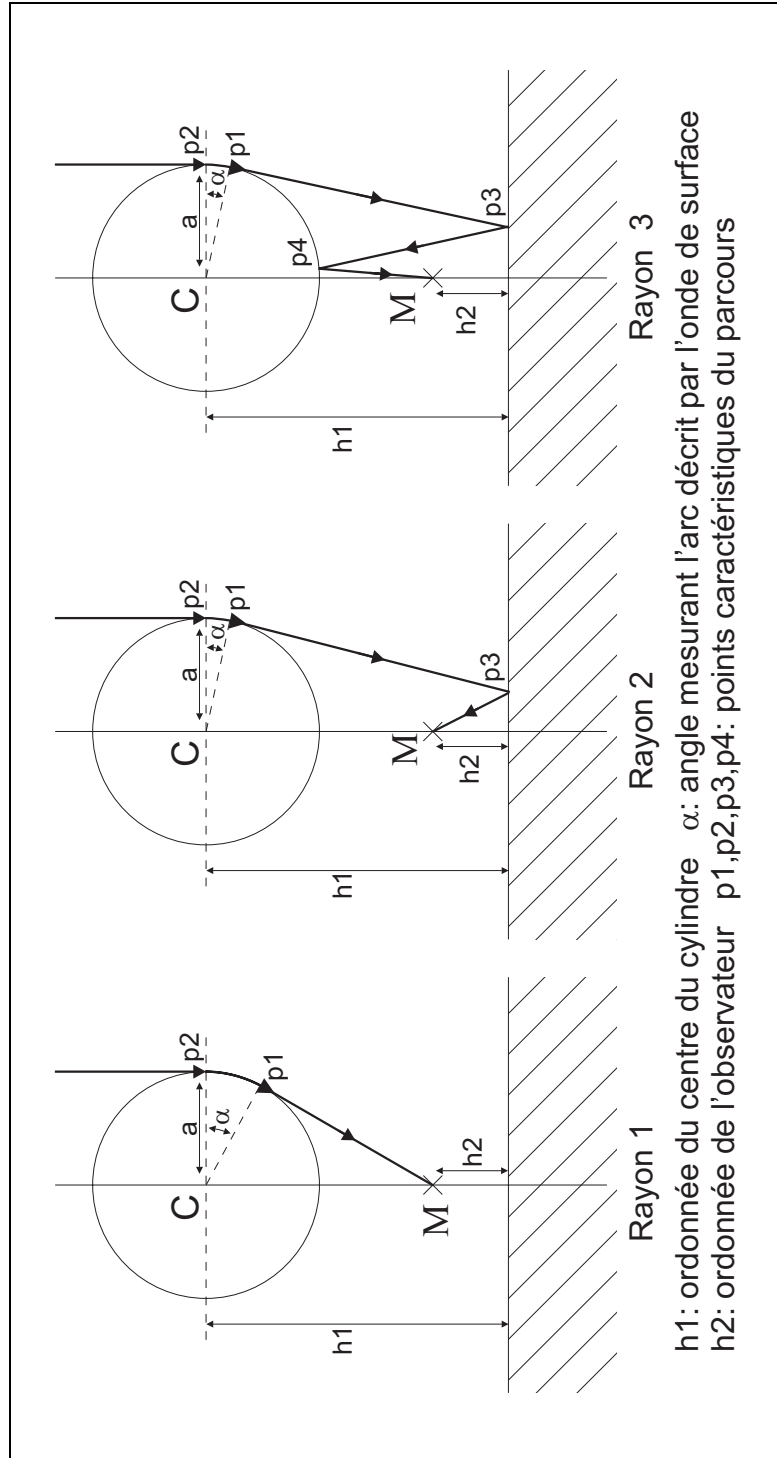


FIG. 4.1 – Vue générale de la configuration harmonique

Le cylindre étant choisi rigide, c'est à dire impénétrable, un observateur situé dans «l'ombre» du cylindre ne reçoit ni l'onde incidente ni une éventuelle onde transmise. L'observateur perçoit donc uniquement l'influence des ondes de surface. Dans le cas d'un cylindre rigide, les ondes de surface se réduisent aux seules ondes de Franz.

Les caractéristiques géométriques (longueur, angle d'incidence etc...) de chacun de ces trois rayons ont pu être déterminées de manière exacte en fonction des paramètres de la configuration cylindre-interface plane, voir l'annexe C.



h1: ordonnée du centre du cylindre α : angle mesurant l'arc décrit par l'onde de surface
 h2: ordonnée de l'observateur p_1, p_2, p_3, p_4 : points caractéristiques du parcours

FIG. 4.2 – Différents parcours envisagés pour le calcul de rayons

4.1.1 Influence du premier rayon

Le premier rayon envisagé correspond à des ondes de Franz qui rayonnent directement vers l'observateur M , il est identique à celui perçu par un observateur situé derrière un cylindre seul. L'interface plane n'a aucune influence sur ce rayonnement.

On peut donc calculer la contribution de ce rayon en utilisant les formules classiques issues de la transformation de Sommerfeld-Watson, voir annexe D. L'observateur se trouvant dans «l'ombre» du cylindre, les formules à employer correspondent au cas sans transformation d'Imai. Si on note $P1_{F_n}$ la contribution de l'onde de Franz d'ordre n et ν_{F_n} le pôle qui lui est associé, on a :

$$P1_{F_n} = -2\pi \frac{\cos(\nu_{F_n}\theta) e^{-i\nu_{F_n}\pi/2}}{\sin \nu_{F_n}\pi} \text{Res}_{\nu_{F_n}} (T_{\nu\nu}) H_{\nu_{F_n}}^1(kr) , \quad (4.2)$$

avec $kr = k(h1 - h2)$

De plus, l'observateur se trouve sur l'axe des ordonnées de sorte que $\theta = 0$, par conséquent :

$$P1_{F_n} = -2\pi \frac{e^{-i\nu_{F_n}\pi/2}}{\sin \nu_{F_n}\pi} \text{Res}_{\nu_{F_n}} (T_{\nu\nu}) H_{\nu_{F_n}}^1(k(h1 - h2)) , \quad (4.3)$$

En prenant en compte tous les modes de Franz, nous obtenons la contribution totale $P1$, donnée par la formule :

$$P1 = \sum_{n=1}^{+\infty} P1_{F_n} . \quad (4.4)$$

4.1.2 Influence du deuxième rayon

D'un point de vue géométrique, on a vu à l'annexe C que le deuxième rayon était équivalent aux ondes de Franz directes (premier rayon) pour un observateur situé au point M' , image du point M par la symétrie relative à l'interface plane. Géométriquement, il suffit de remplacer dans les formules précédentes $h2$ par $-h2$. Il faut également tenir compte du fait que ce rayon subit une réflexion sur l'interface plane avec un angle d'incidence α .

Finalement, la contribution du deuxième rayon $P2_{F_n}$ associé à l'onde de Franz d'ordre n , vaut :

$$P2_{F_n} = -2\pi R(\alpha) \frac{e^{-i\nu_{F_n}\pi/2}}{\sin \nu_{F_n}\pi} \text{Res}_{\nu_{F_n}} (T_{\nu\nu}) H_{\nu_{F_n}}^1(k(h1 + h2)) , \quad (4.5)$$

où $R(\alpha)$ est le coefficient de réflexion de l'interface plane sous l'angle α .

De même, la contribution totale $P2$ liée au deuxième rayon et à tous les modes de Franz vaut :

$$P2 = \sum_{n=1}^{+\infty} P2_{F_n} . \quad (4.6)$$

4.1.3 Influence du troisième rayon

Le cas du troisième rayon est plus délicat, car on ne peut pas trouver, comme dans le cas précédent, un point équivalent M'' qui donne directement la contribution du troisième rayon en fonction des formules établies pour le premier rayon. Néanmoins, on connaît la valeur de l'angle

α associé à l'arc de cercle parcouru par le troisième rayon sous forme d'onde de surface. On peut alors calculer la valeur $h2''$ de l'ordonnée de l'observateur qui percevrait des ondes de Franz directes ayant parcouru le même arc de cercle $a\alpha$. On notera L'' la longueur du trajet effectué par ces ondes de Franz directes dans le milieu extérieur, et L_{reel} la longueur réellement parcourue par le troisième rayon dans le milieu extérieur. On considérera donc que la contribution du troisième rayon est égale à la contribution des ondes de Franz directes pour un observateur dont l'ordonnée vaut $h2''$ et on compensera la différence de marche des rayons par le coefficient $e^{ik(L_{reel}-L'')}$. Enfin, le troisième rayon subit deux réflexions : une sur l'interface plane avec l'angle d'incidence α et l'autre sur le cylindre. Le coefficient de réflexion sur le cylindre rigide sera approximé par celui de l'interface plane rigide, c'est à dire par 1.

Les termes $h2''$ et L'' se calculent facilement :

$$h2'' = h1 - a / \tan \alpha , \quad (4.7a)$$

$$L'' = a / \tan \alpha , \quad (4.7b)$$

Finalement, si on note $P3_{Fn}$ la contribution du troisième rayon associé à l'onde Franz d'indice n , on a :

$$P3_{Fn} = -2\pi R(\alpha) \frac{e^{-i\nu_{Fn}\pi/2}}{\sin \nu_{Fn}\pi} Res_{\nu_{Fn}}(T_{\nu\nu}) H_{\nu_{Fn}}^1(k(h1 - h2'')) e^{ik(L_{reel}-L'')} . \quad (4.8)$$

La contribution totale du troisième rayon $P3$ vaut :

$$P3 = \sum_{n=1}^{+\infty} P3_{Fn} . \quad (4.9)$$

4.1.4 Application numérique

On choisira de prendre $a = 1$ pour le rayon du cylindre (il n'est pas indispensable de préciser l'unité) et l'ordonnée du centre du cylindre $h1 = 1, 5$. L'ordonnée de l'observateur varie entre $h2 = 0$ et $h2 = 0, 5$. La fréquence de l'onde incidente sera choisie telle que $ka = 20$.

Seuls les trois premiers modes de Franz seront pris en compte, et les pôles correspondant valent respectivement pour une valeur de $ka = 20$ [Clo90] :

$$\nu_{F1} \simeq 21, 07 + I1, 95 , \quad (4.10a)$$

$$\nu_{F1} \simeq 23, 45 + I6, 14 , \quad (4.10b)$$

$$\nu_{F1} \simeq 25, 10 + I9, 16 , \quad (4.10c)$$

Il est aussi à rappeler que pour un cylindre rigide, on a :

$$T_{\nu\nu} = -J'_\nu(ka) / H_\nu^1(ka) .$$

Les figures 4.3 et 4.4 nous donnent respectivement l'amplitude et la phase du champ acoustique approximé par les contributions des trois rayons $P = P1 + P2 + P3$.

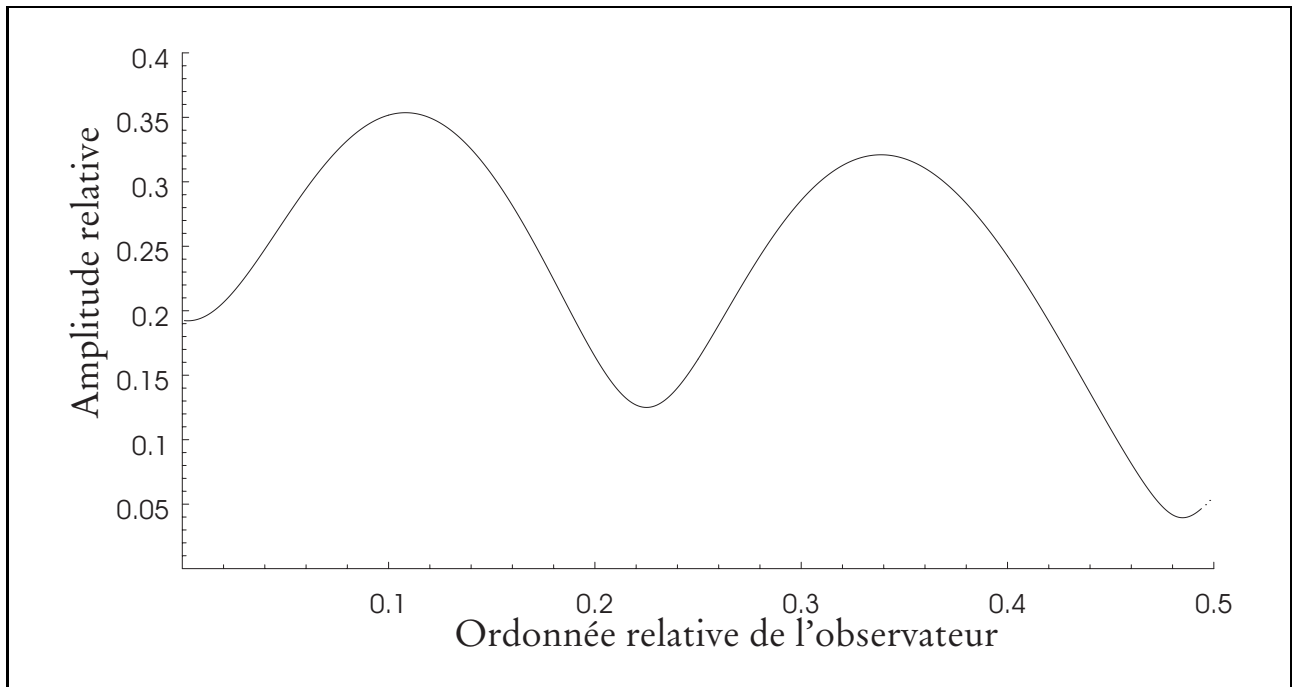


FIG. 4.3 – Amplitude du champ acoustique perçu par un observateur situé entre l'interface plane et le cylindre (approximation par un calcul de rayons)

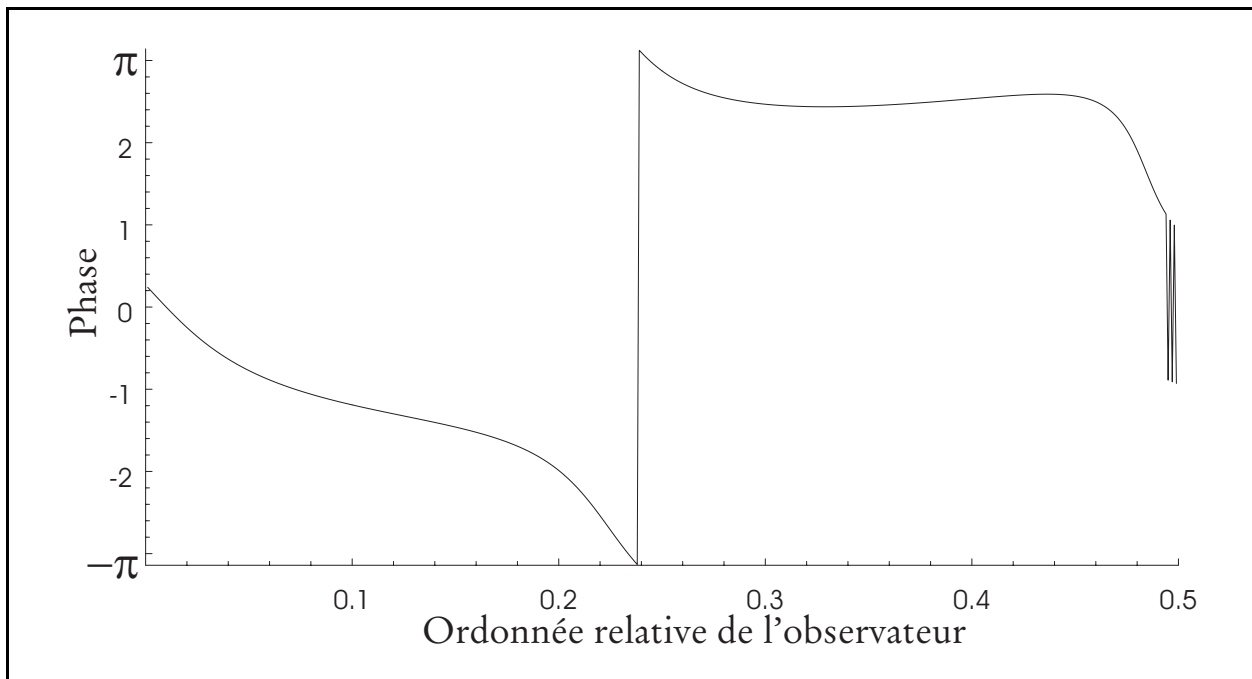


FIG. 4.4 – Phase du champ acoustique perçu par un observateur situé entre l'interface plane et le cylindre (approximation par un calcul de rayons)

L'application numérique que nous venons de voir, constitue une approximation du champ diffusé réel. En effet, ce calcul est l'aboutissement de plusieurs approximations successives, que l'on peut énumérer ainsi :

1. Le calcul de la contribution de chacune des ondes de surface suppose le produit ka élevé et néglige l'intégrale de fond de la transformée de Sommerfeld-Watson.
2. La contribution des rayons est estimée en ne tenant compte que des trois premières ondes de Franz.
3. La détermination des pôles et des résidus ne peut se faire de manière tout à fait exacte et engendre une certaine imprécision numérique.
4. La réflexion sur le cylindre rigide est étudiée en considérant que le cylindre se comporte localement comme une interface plane.
5. Le modèle du rayon est une approximation importante de l'onde physique surtout quand on cherche à estimer le champ dans un espace réduit soumis à des interactions multiples.
6. Seuls trois trajets possibles ont été retenus pour les rayons.

La dernière approximation est la plus sévère, car l'observateur situé entre l'interface et le cylindre reçoit, en théorie, une infinité de rayons qui se réfléchissent un nombre donné de fois sur le cylindre et sur l'interface. Bien sûr, prise isolément, une onde qui effectue un grand nombre de « va et vient » entre le cylindre et l'interface n'aura qu'une faible influence, le coefficient de réflexion de l'interface plane étant inférieur à 1. Néanmoins, il est délicat d'affirmer que la sommation de toutes ces ondes prend la forme d'un bruit blanc, engendré par une addition d'ondes incohérentes (en considérant que la multiplicité des réflexions et la diversité des parcours de rayons aboutissent à une suite de déphasages aléatoires), ou que cette sommation est absolument négligeable.

4.1.5 Comparaison avec la méthode des images généralisée

En reprenant la méthode des images généralisée, le champ acoustique dans l'espace est la somme de quatre contributions : l'onde plane incidente P_{inc} , l'onde plane réfléchie P_{ref} , la diffusion totale par le cylindre P_{cyl} et la réaction de l'interface plane P_{int} face à la diffusion P_{cyl} .

Au chapitre 2, nous avons vu que :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D}^n)^{-1} \cdot \vec{\Psi} \right\rangle, \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{P}_{int} = \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D}^n)^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \vec{\Psi}^s \right\rangle, \quad (4.11b)$$

\mathbf{I} étant l'opérateur identité, \mathbf{D} , \mathbf{R} et \mathbf{T} étant des opérateurs linéaires parfaitement connus, voir chapitre 2.

La configuration géométrique est conservée et nous avons toujours : $h1 = 1, 5$ et $a = 1$.

Les figures 4.5 et 4.6 permettent de comparer le calcul précédent fait à partir d'une théorie de rayons avec celui effectué à partir de la méthode des images généralisée.

On constate que, malgré une différence entre les deux modèles, les deux descriptions des champs acoustiques restent cohérentes. On peut aussi remarquer que l'erreur de phase est plus importante si l'observateur se rapproche du cylindre. La proximité du cylindre est effectivement la zone où la théorie de rayons est la moins fiable : les composantes liées aux rayons 1 (ondes de Franz directe) et 2 (ondes de Franz avec une réflexion sur l'interface) deviennent de moins en moins prépondérantes quand l'observateur se situe à proximité du cylindre.

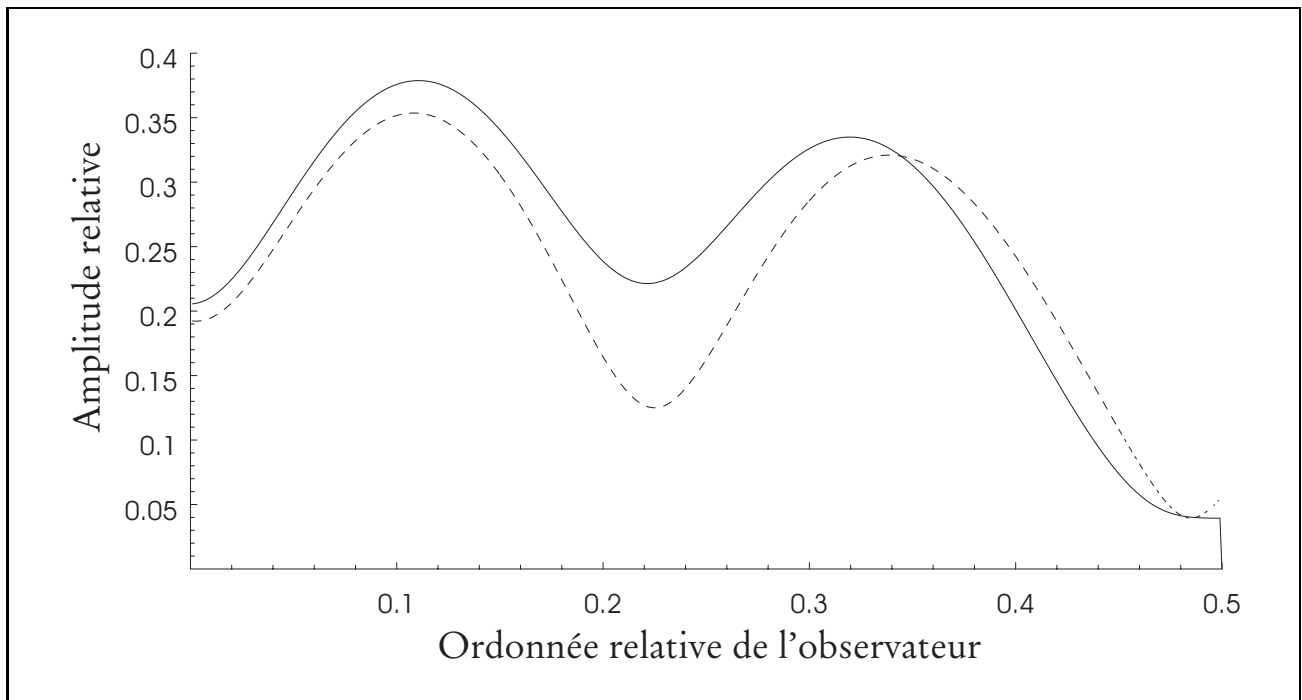


FIG. 4.5 – Amplitude du champ acoustique entre l'interface plane et le cylindre : théorie de rayons (trait discontinu) et méthode des images généralisée (trait continu)

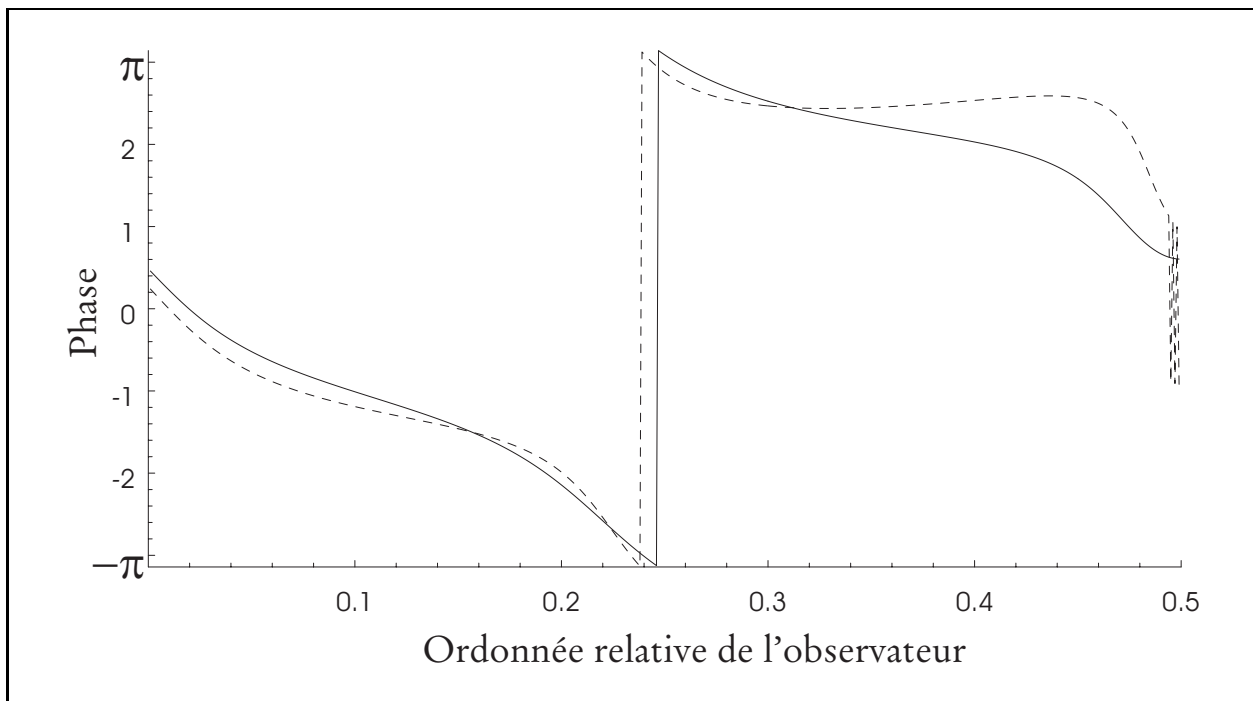


FIG. 4.6 – Phase du champ acoustique entre l'interface plane et le cylindre : théorie de rayons (trait discontinu) et méthode des images généralisée (trait continu)

Compte tenu des approximations faites sur la théorie de rayons, on peut considérer que le calcul par la méthode des images généralisée donne une estimation du champ acoustique tout à fait acceptable.

4.2 Analyse temporelle

Nous allons maintenant considérer un observateur situé au dessus du cylindre, comme indiqué sur la figure 4.7. L'observateur reçoit maintenant directement l'onde incidente.

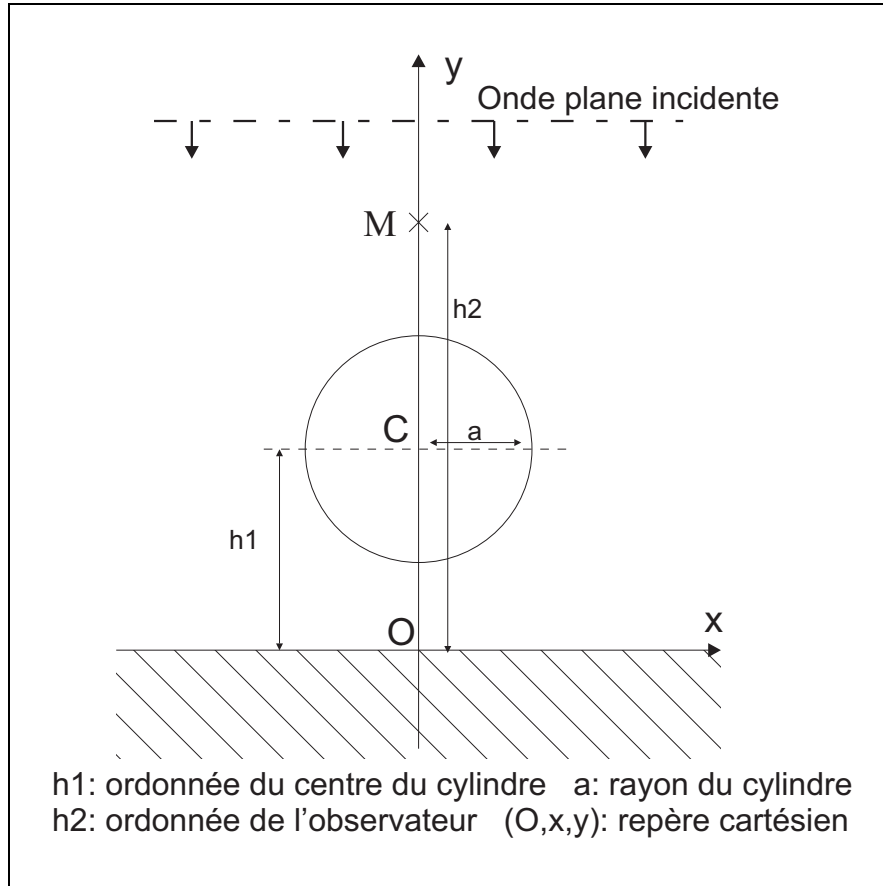


FIG. 4.7 – Vue générale de la configuration de l'analyse temporelle

Numériquement, nous choisissons un rayon unitaire $a = 1$, $h1 = 1,5a$ et $h2 = 3a$. Le cylindre est toujours considéré comme rigide et l'interface fluide-fluide correspond encore à la première configuration étudiée au chapitre 3, voir 3.2.1.

La figure 4.8 nous montre la valeur du champ acoustique total, calculé par la méthode des images généralisée, par rapport au champ acoustique incident perçu au point d'observation. On fait varier le produit ka entre 8 et 100, ce qui correspond à faire varier les fréquences entre 2,27 kHz et 28,33 kHz.

En effectuant la transformée de Fourier inverse du rapport *champ total/champ incident* au point d'observation en fonction de la fréquence, on obtient le signal temporel reçu par l'observateur pour une impulsion émise à l'instant 0 au niveau de l'observateur.

La figure 4.9 nous montre cette transformée de Fourier inverse en fonction d'une distance parcourue par une onde dans le milieu externe.

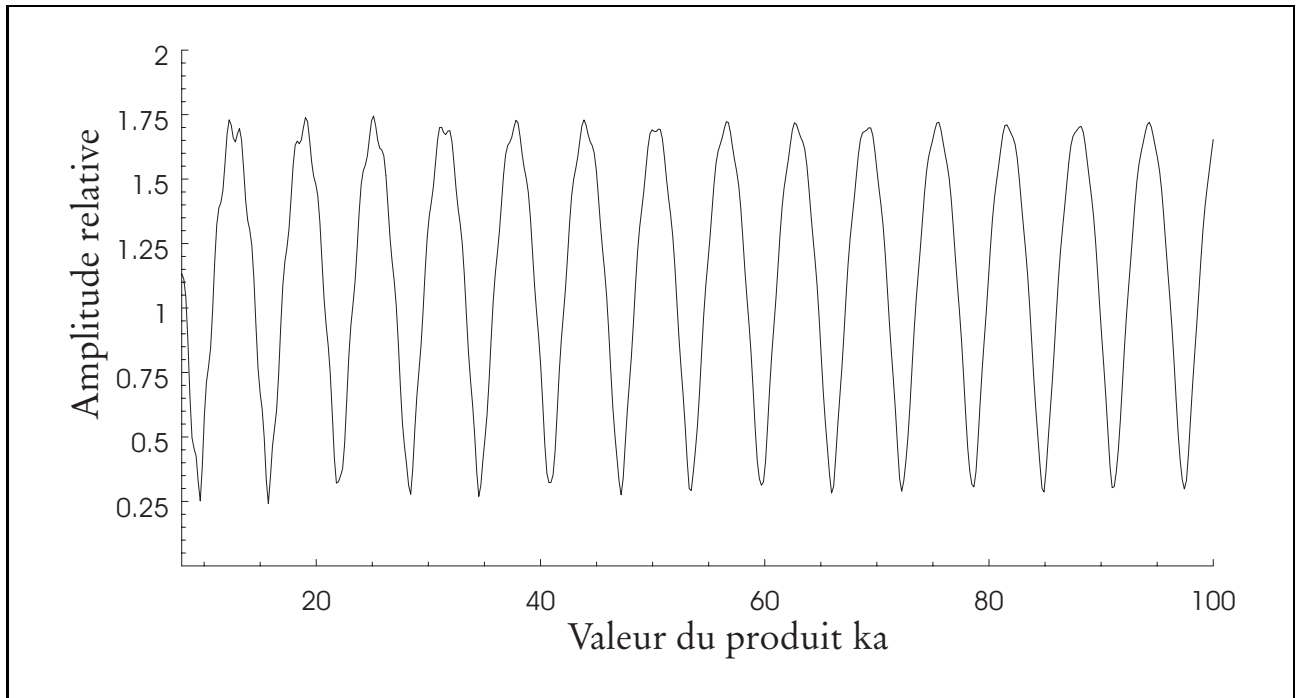


FIG. 4.8 – Norme du rapport champ acoustique total sur incident au point d'observation

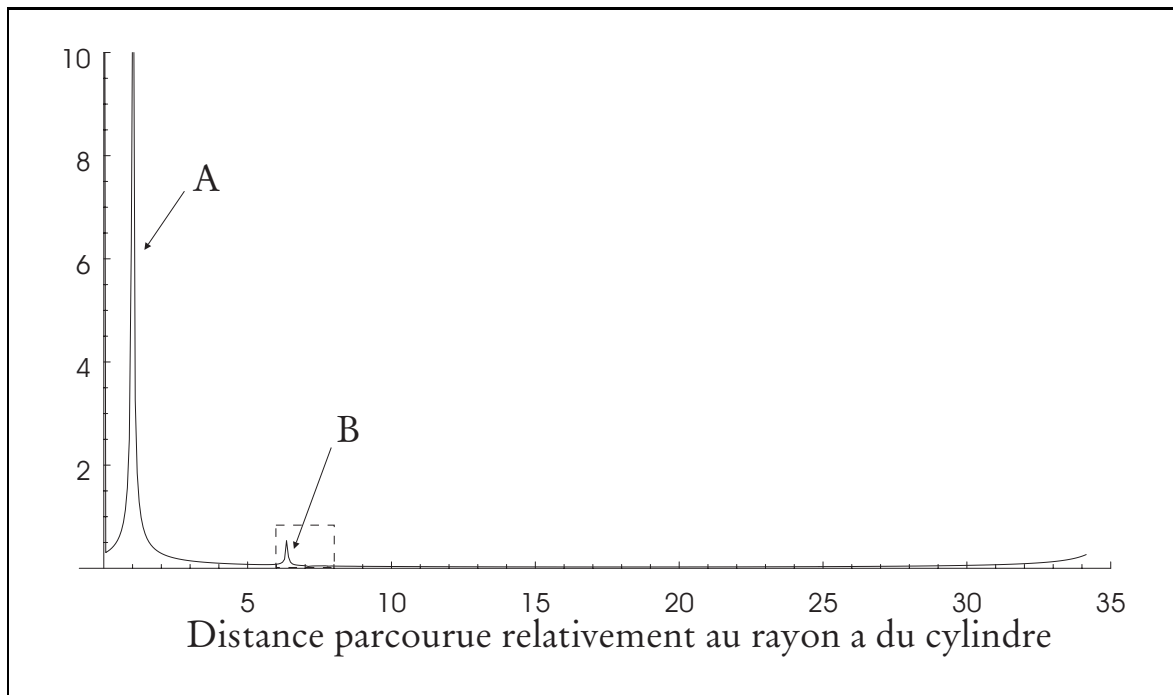


FIG. 4.9 – Résultat de la transformée de Fourier inverse

Le pic A correspond très clairement à l'onde spéculaire réémise par le cylindre, voir figure 4.10.

Le temps de parcours donné par le pic B correspond quant à lui à la réflexion sur l'interface fluide-fluide, voir figure 4.10. On rappelle que, par convention, les rayons décrits arrivent par la droite du cylindre et que les rayons équivalents passant par la gauche se déduisent par symétrie.

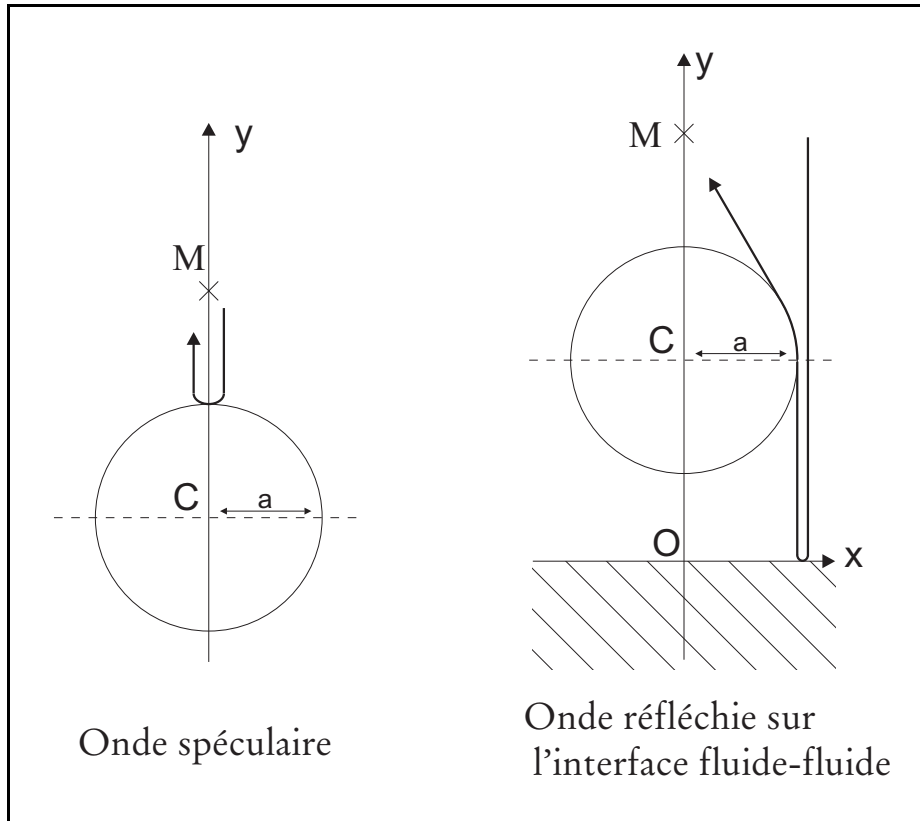


FIG. 4.10 – Deux principales composantes

En effectuant un zoom sur la partie encadrée de la figure 4.9, on peut apercevoir deux autres composantes, cf figure 4.11.

La première composante C correspond à une onde de Franz entrant par un côté et ressortant par l'autre après une réflexion sur l'interface fluide-fluide, voir figure 4.12.

Enfin, la composante D est également une onde Franz passant d'un côté à l'autre mais qui se réfléchit en plus sur le cylindre, voir figure 4.12.

Finalement, on constate que les champs acoustiques calculés par la méthode des images généralisée donne lieu dans le domaine temporel à des interprétations, en termes de parcours de rayons, tout à fait cohérentes avec la configuration géométrique. En ce sens, la méthode des images généralisée fournit une estimation du champ acoustique physiquement très acceptable.

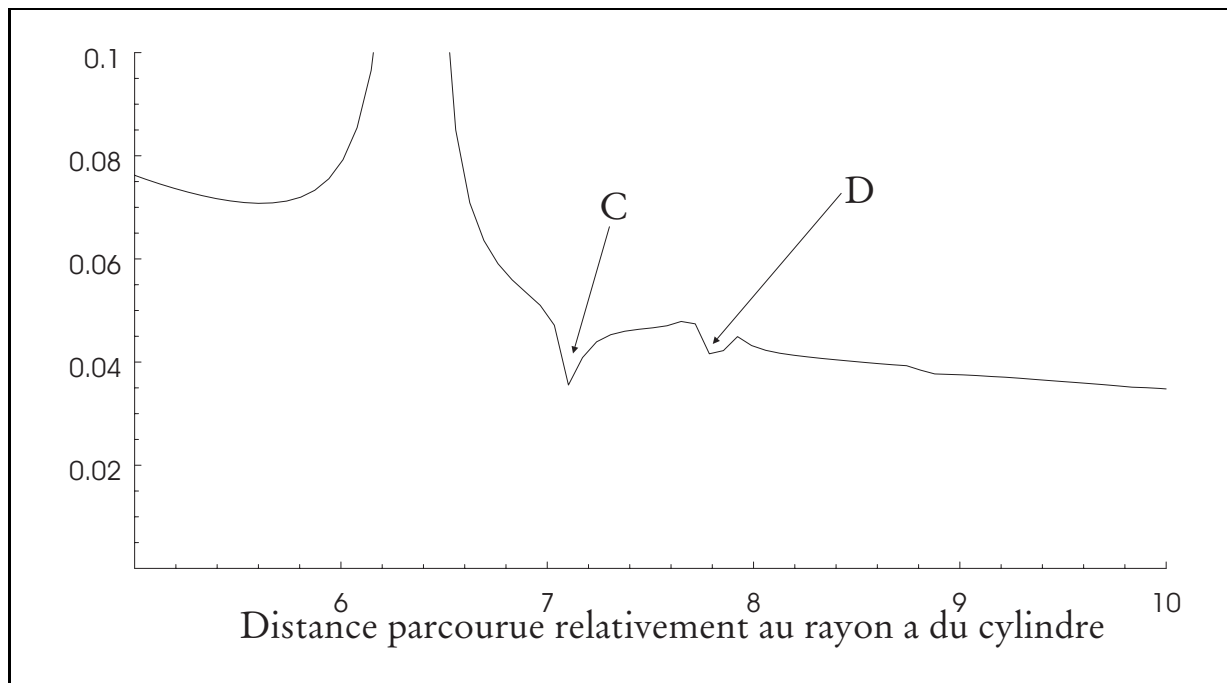


FIG. 4.11 – Zoom de la figure 4.9

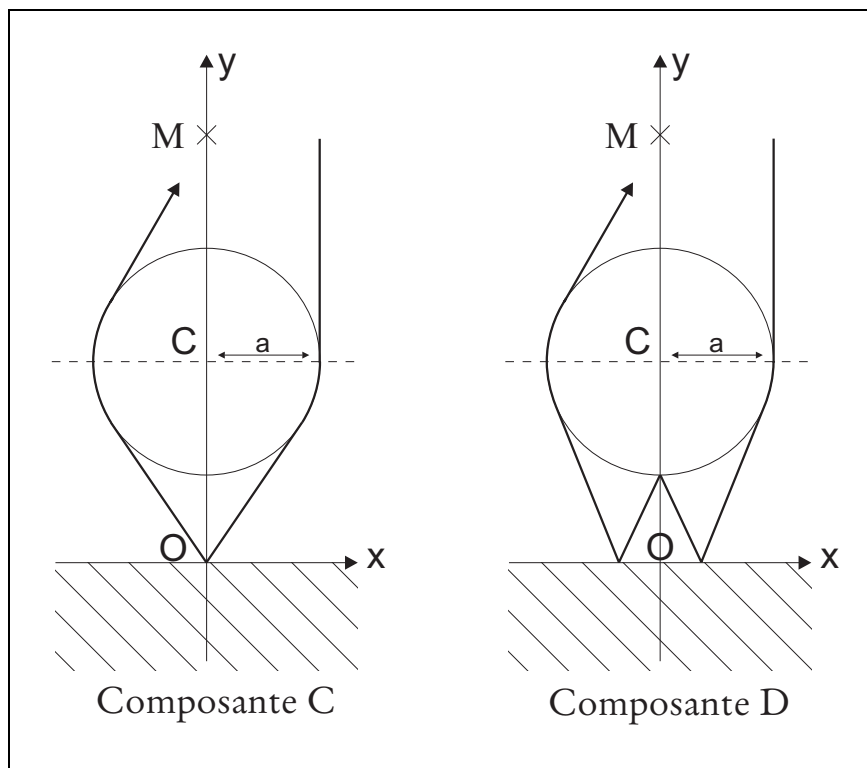


FIG. 4.12 – Deux autres composantes

4.3 Cylindre élastique

Dans le cas d'un cylindre rigide, seules intervenaient les ondes de Franz et éventuellement les réflexions directes sur la surface du cylindre. Le cas du cylindre élastique s'avère bien plus complexe : Les ondes de surface peuvent être de natures multiples (ondes de galerie à écho, onde de Rayleigh, onde de Stoneley et ondes de Franz). Ces ondes n'émettent plus forcément tangentiellement au cylindre, ce qui rend caduques les calculs de trajet effectués à l'annexe C. Le cylindre n'est plus impénétrable et il faut tenir compte des ondes de volume transmises par le cylindre. Toutes ces raisons font qu'une théorie de rayons devient très délicate à mettre en œuvre pour décrire le champ acoustique diffusé par un cylindre élastique à proximité d'une interface plane.

En revanche, la méthode des images généralisée ne pose pas de problème particulier lié à l'élasticité du cylindre. La nature du diffuseur n'intervient que par le biais de l'opérateur \mathbf{T} . Les temps de calcul et la complexité algorithmique sont indépendants de la nature et de la géométrie du cylindre.

A titre d'exemple numérique, nous reprenons le cas du tube élastique traité au chapitre 1. Les dimensions du tube sont :

$$a = 0,003572 \text{ m}, \quad \frac{b}{a} = 0,9, \quad (4.12)$$

où a est le rayon externe et b le rayon interne.

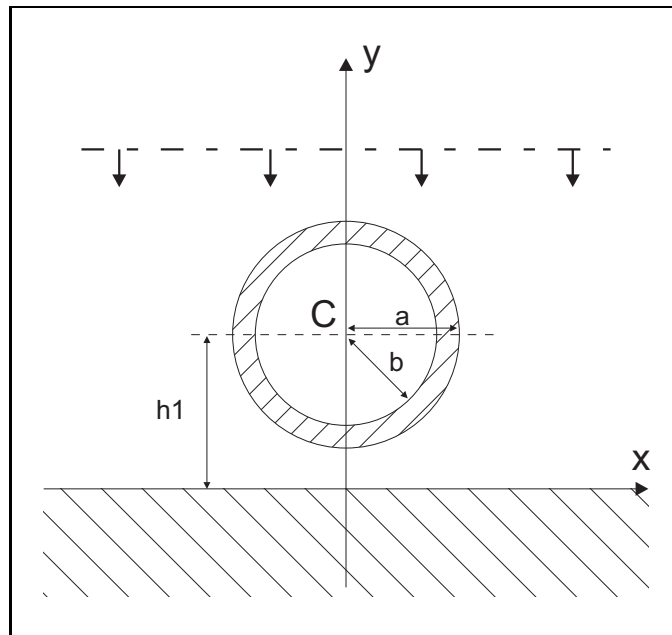
Les caractéristiques physiques étant :

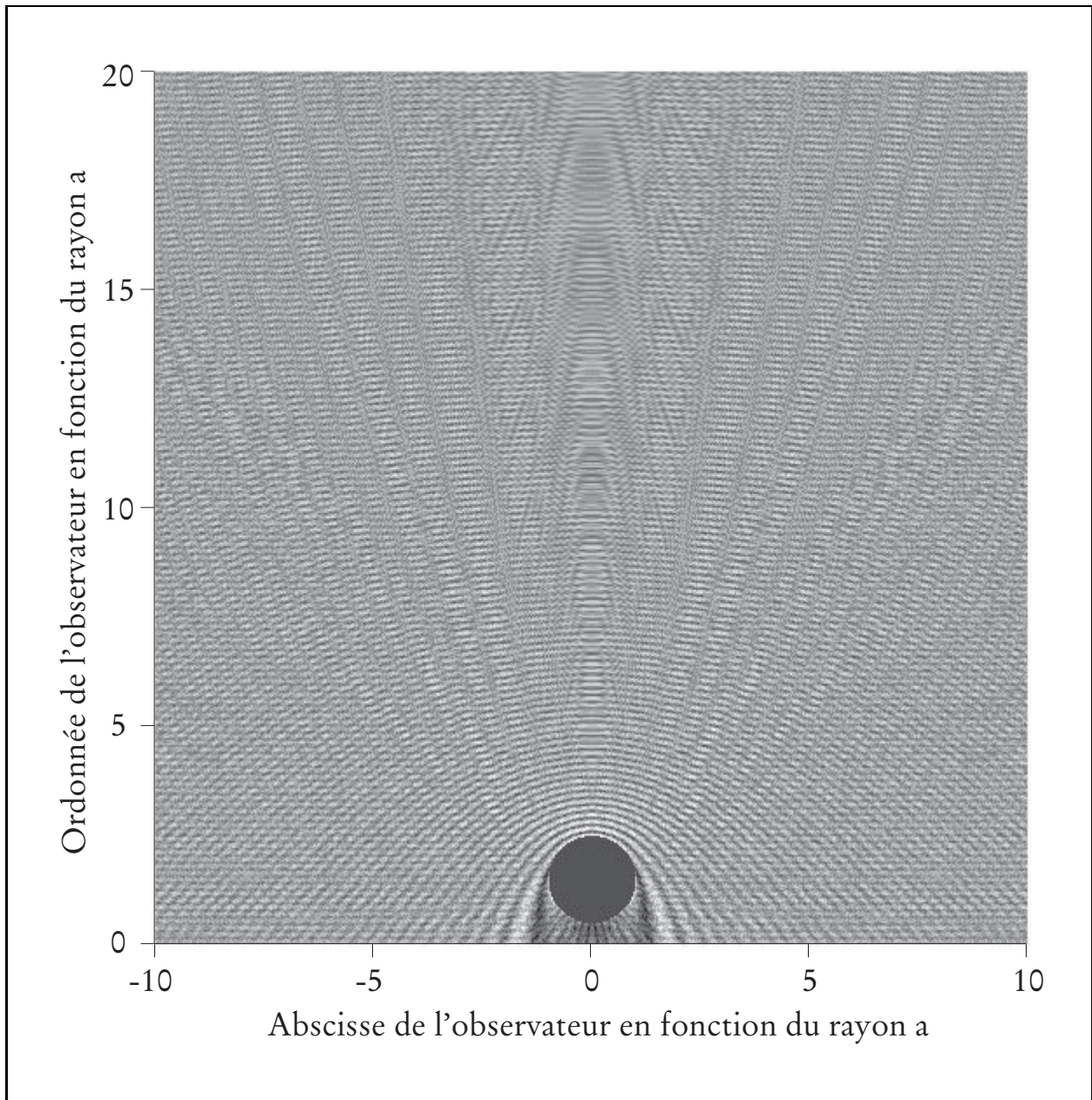
$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_1 &= 1780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho_2 &= 2790 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_L &= 6380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, & c_T &= 3100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

où ρ_i indique la masse volumique du milieu indicé i . La vitesse de l'onde dans le fluide externe, la vitesse longitudinale et la vitesse transversale dans le corps du tube sont notés respectivement c_1 , c_L et c_T . On rappelle que la partie creuse du tube est considérée comme vide.

On situera le centre du tube à une distance $h_1 = 1,5a$ de l'interface plane. L'ensemble interface-tube sera soumis à une onde plane incidente unitaire et monochromatique se propageant perpendiculairement à l'interface, voir figure 4.13. La fréquence de l'onde incidente sera fixée telle que le produit ka vaille 20.

La figure 4.14 nous montre la norme du champ acoustique perçu par un observateur situé à une abscisse comprise entre $-10a$ et $10a$ et une ordonnée comprise entre 0 et $20a$. Le calcul d'une cartographie de 1000x1000 points ne dépasse pas, avec la méthode des images généralisée, dix minutes avec un PC moyen (Pentium II 400MHz).

FIG. 4.13 – *Configuration du tube à proximité de l'interface plane*

FIG. 4.14 – *Cartographie de la norme du champ acoustique autour du tube*

Chapitre 5

Étude du cylindre enfoui

Introduction

Les chapitres précédents ont permis de traiter la diffusion par un cylindre à proximité d'une interface plane. Dans cette configuration, la cible représentée par un cylindre est insonée directement par l'onde incidente.

Au cours de ce chapitre nous allons étudier le cas d'un tube métallique enfoui à une profondeur donnée dans un milieu sédimentaire.

Dans une première partie, nous verrons que la modélisation du cylindre à proximité d'une interface plane intervient de façon naturelle dans la situation du cylindre enfoui. Nous serons, néanmoins, amenés à compléter la théorie des images généralisée qui ne permet de traiter qu'une partie du problème.

La seconde partie sera une application numérique d'un exemple de cylindre enfoui rencontré dans le cadre de l'activité expérimentale du Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Électroacoustique de l'Université du Havre.

5.1 Modélisation du cylindre enfoui

5.1.1 Géométrie du problème

Un milieu sédimentaire est recouvert d'eau et l'interface entre les deux milieux (considérés comme deux demi-espaces) est assimilé à un plan. Un cylindre, suffisamment long pour être considéré de longueur infinie, est enfoui dans le milieu sédimentaire, de telle façon que son axe soit parallèle à l'interface plane. La distance entre l'axe du cylindre et l'interface est notée h_1 .

Une onde plane incidente unitaire se propageant dans l'eau atteint l'interface plane avec un angle d'incidence α_i . La propagation de cette onde incidente se fait perpendiculairement à l'axe du cylindre. La géométrie du problème peut donc se réduire à un problème de dimension 2. La figure 5.1 permet d'ailleurs de visualiser la situation par une vue en coupe perpendiculaire à l'axe du cylindre.

L'onde plane incidente engendre une onde plane réfléchie et une onde plane réfractée. Cette dernière excitera le cylindre. Le cylindre se situant à proximité de l'interface plane, la diffusion par le cylindre devra tenir compte de l'interaction cylindre-interface.

Un observateur M situé dans l'eau perçoit 3 composantes : la première est l'onde plane incidente, la deuxième est l'onde plane réfléchie, et la troisième est la transmission à l'eau de l'onde cylindrique diffusée par le cylindre.

Le milieu sédimentaire est un milieu diphasique composé d'eau et d'élément solide (vase). Le comportement mécanique de ce milieu peut être assimilé à un milieu fluide, la propagation des ondes transversales dans ce milieu étant négligée. La vitesse de propagation des ondes longitudinales et la densité du milieu seront supposées homogènes et connues. Les coefficients de réflexion et de transmission eau-milieu sédimentaire et milieu sédimentaire-eau sont par conséquent également connus.

Ainsi, l'onde plane incidente, l'onde réfléchie et l'onde réfractée sont parfaitement déterminées et font parties des paramètres connus du problème.

La détermination du champ acoustique perçu par un observateur M , situé dans l'eau, se résume en réalité à deux difficultés :

1. Détermination de l'onde cylindrique diffusé par le cylindre.
2. Détermination de l'onde transmise à l'eau produite par l'onde cylindrique précédente.

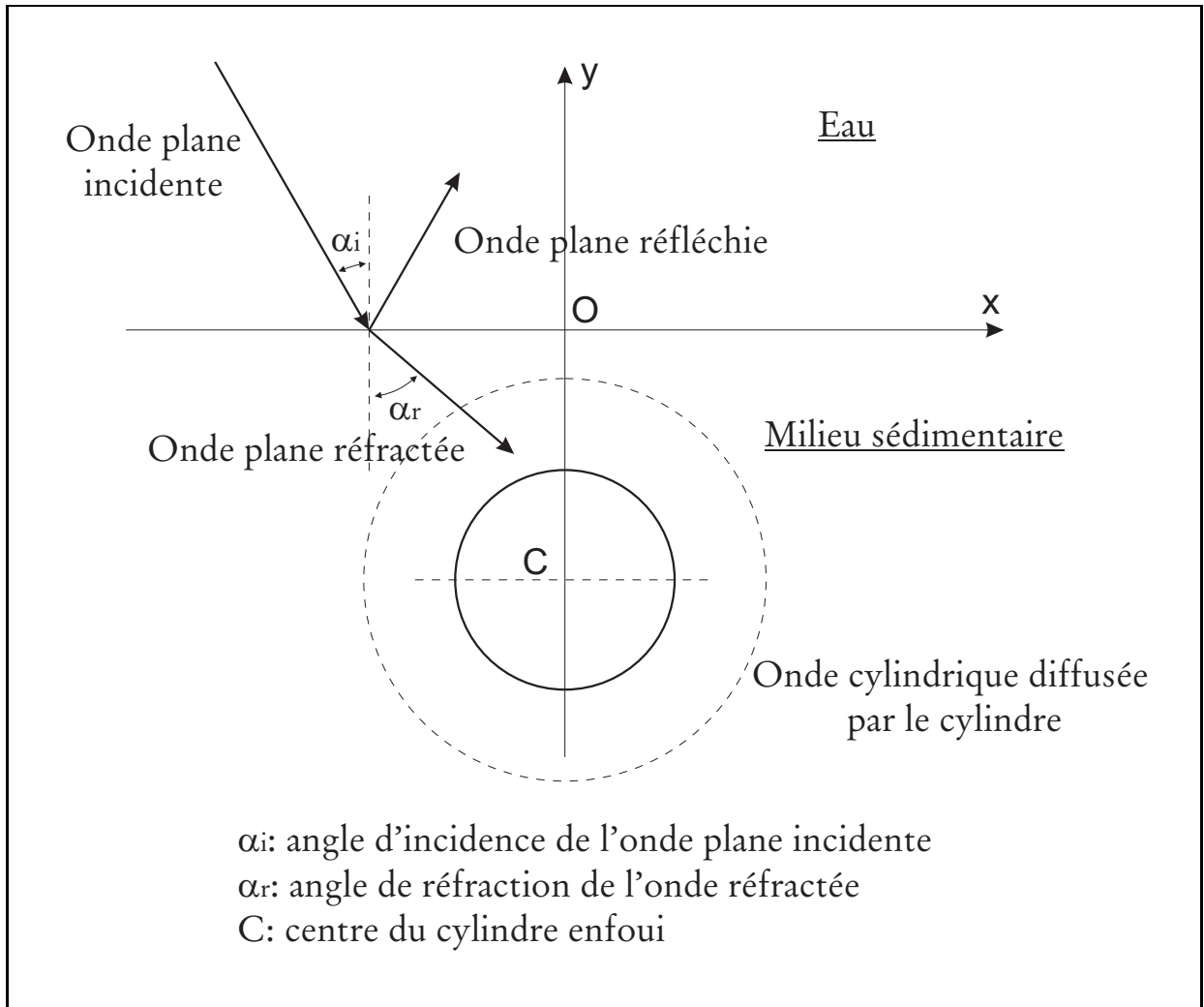


FIG. 5.1 – Vue générale d'un cylindre enfoui

5.1.2 Onde diffusée par le cylindre

En inversant le sens de parcours de l'axe des ordonnées Oy , nous retrouvons le problème du cylindre à proximité d'une interface fluide-fluide (milieu sédimentaire-eau), voir figure. L'onde plane réfractée joue, alors, le rôle de l'onde incidente de l'ensemble cylindre-interface. L'angle d'incidence α sur le cylindre est égal à $\pi - \alpha_r$, où α_r est l'angle de réfraction.

Nous avons d'ailleurs vu précédemment au paragraphe 2.2.4 le cas où l'onde plane excitatrice avait un angle d'incidence α supérieur à $\pi/2$.

En réalité, pour appliquer directement les formules déduites de la méthode des images généralisée, il ne faut pas oublier deux éléments. Le premier est que l'onde réfractée n'est plus unitaire. Nous devons tenir compte du coefficient de transmission eau-milieu sédimentaire. La seconde précaution à prendre est de choisir une origine des phases commune pour toutes les ondes planes. Précédemment, tout se passait dans un même milieu et le centre du cylindre était une origine naturelle. Ici, le centre du cylindre peut toujours être choisi comme origine, mais l'onde plane incidente et l'onde réfléchie dans l'eau doivent être exprimées par rapport à cette origine

en tenant compte de la célérité dans les deux milieux.

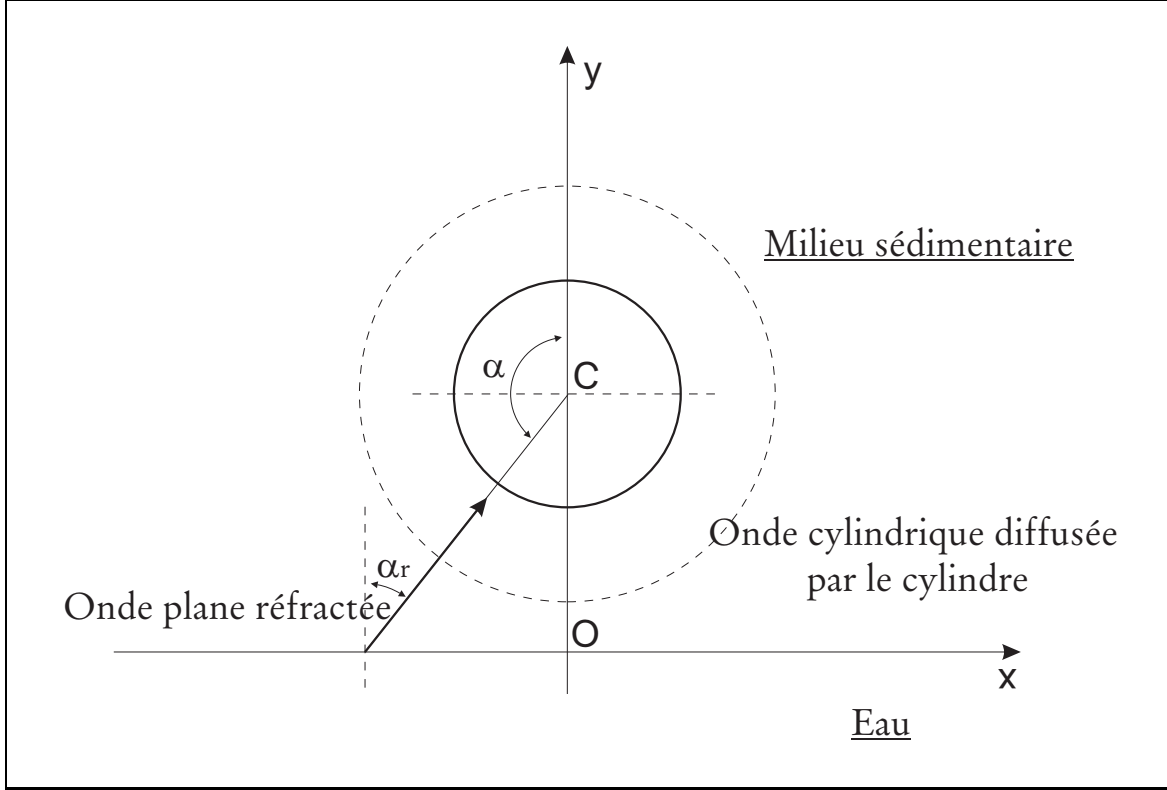


FIG. 5.2 – Retour à une configuration traitée par la méthode des images généralisée

Toutes ces précautions étant prises, nous obtenons que l'onde cylindrique diffusée par le cylindre \mathbf{P}_{cyl} , qui tient compte de l'interaction cylindre-interface, est de la forme suivante, voir 2.25 :

$$\mathbf{P}_{cyl} = CT_{eau-sediment}(\alpha_i) \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D}^n)^{-1} \cdot \vec{\Psi} \right\rangle, \quad (5.1)$$

où $CT_{eau-sediment}$ est le coefficient de transition de l'eau vers le milieu sédimentaire.

En revenant au sens initial de l'axe Oy de la figure 5.1, l'expression de l'onde cylindrique diffusée par le cylindre est, d'après les conventions adoptées au chapitre 2 :

$$\mathbf{P}_{cyl} = CT_{eau-sediment}(\alpha_i) \left\langle \vec{\mathbf{a}}_0, \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D}^n)^{-1} \cdot \vec{\Psi}^s \right\rangle. \quad (5.2)$$

On rappelle que :

$$\vec{\Psi}^s = (\Psi_n^s), \quad (5.3)$$

et que

$$\Psi_n^s = H_n^1(kr_s) e^{in\theta_s}. \quad (5.4)$$

Dans le cas présent, le module du vecteur $\vec{\mathbf{k}}$ et l'angle d'incidence θ_s concernent la propagation dans le milieu sédimentaire, et : $k = \omega/c_{sediment}$ où $c_{sediment}$ est la célérité de l'onde dans le milieu sédimentaire.

Le vecteur $\vec{\mathbf{a}}_0$ se détermine parfaitement à partir de l'angle d'incidence α , voir précédemment 2.2.4. Les caractéristiques du cylindre étant fixées et le coefficient de réflexion milieu sédimentaire-eau étant donné, les opérateurs linéaires \mathbf{D} et \mathbf{T} sont parfaitement déterminés. L'onde cylindrique diffusée par le cylindre est donc, maintenant, explicitement connue. Le seul problème restant, pour connaître le champ acoustique perçu par un observateur M dans l'eau, est d'exprimer le champ acoustique que transmet à l'eau cette onde cylindrique.

5.1.3 Transmission de l'onde cylindrique

D'une façon générale, l'onde cylindrique diffusée par le cylindre s'exprime linéairement à partir des coordonnées du vecteur $\vec{\Psi}^s$, c'est à dire :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^s \rangle, \quad (5.5)$$

où $\vec{\mathbf{a}}$ est un vecteur donné. Le problème du calcul de l'onde transmise, produite par l'onde diffusée par le cylindre, se résume à la détermination de l'onde transmise produite par l'onde élémentaire Ψ_n^s , avec n quelconque.

Nous avons vu au chapitre 2 que l'expression $\Psi_n^s = H_n^1(kr_s) e^{in\theta_s}$ pouvait se décomposer sous la forme d'un spectre d'ondes planes :

$$\Psi_n^s = \frac{1}{\pi} \int_S e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_c) \cos \theta_k)} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k, \quad (5.6)$$

avec S le contour de Sommerfeld vu à la figure 2.4 et y_c la distance du centre du cylindre à l'interface (OC).

En utilisant le principe de superposition et en considérant la transmission de chaque onde plane, on peut déterminer l'onde transmise Ψ_n^{st} produite par Ψ_n^s . On obtient en effet l'expression :

$$\Psi_n^{st} = \frac{1}{\pi} \int_S CT_{sediment-eau}(\theta_k) e^{ike(x \sin \theta_k^e + y \cos \theta_k^e)} e^{iky_c \cos \theta_k} e^{in(\theta_k - \pi/2)} d\theta_k, \quad (5.7)$$

où θ_k^e est l'angle de réfraction dans l'eau associé à θ_k , ke le module du vecteur d'onde dans l'eau et $CT_{sediment-eau}$ le coefficient de transmission milieu sédimentaire-eau. L'angle θ_k^e se déduit de θ_k grâce aux lois de Snell-Descartes :

$$ke \sin \theta_k^e = k \sin \theta_k. \quad (5.8)$$

Afin de simplifier l'expression 5.7, nous allons supposer que le terme k est élevé et utiliser la méthode de la phase stationnaire pour en donner une approximation, voir le chapitre «Intégrales dépendant d'un paramètre» de l'ouvrage [Die80].

La méthode de la phase stationnaire permet de montrer que, si la dérivée h' s'annule en un seul point c , et si $g(c) \neq 0$ et $h''(c) \neq 0$, nous pouvons écrire sur un intervalle fermé $[a, b]$:

$$\int_a^b g(x) e^{ith(x)} dx = \left(\frac{\pi}{2th''(c)} \right)^{1/2} g(c) e^{ith(c)+i\pi/4} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (5.9a)$$

si $h''(c) > 0$, et :

$$\int_a^b g(x) e^{ith(x)} dx = \left(\frac{\pi}{-2th''(c)} \right)^{1/2} g(c) e^{ith(c)-i\pi/4} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (5.9b)$$

si $h''(c) < 0$.

En appliquant ce résultat à l'expression 5.7, on peut poser :

$$g_n(\theta_k) = CT_{\text{sediment-eau}}(\theta_k) e^{in(\theta_k - \pi/2)}, \quad (5.10a)$$

$$h(\theta_k) = \frac{1}{k} [ke(x \sin \theta_k^e + y \cos \theta_k^e) + ky_c \cos \theta_k], \quad (5.10b)$$

En utilisant la loi de Snell-Descartes 5.8 et en sachant que

$$\cos \theta_k^e = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_k^e} = \sqrt{1 - (k/ke)^2 \sin^2 \theta_k},$$

on a :

$$h(\theta_k) = x \sin \theta_k + y \frac{ke}{k} \sqrt{1 - (k/ke)^2 \sin^2 \theta_k} + y_c \cos \theta_k. \quad (5.11)$$

On en déduit également l'expression de la dérivée h' :

$$h'(\theta_k) = x \cos \theta_k - y \frac{k}{ke} \frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{\sqrt{1 - (k/ke)^2 \sin^2 \theta_k}} - y_c \sin \theta_k, \quad (5.12a)$$

ou encore :

$$h'(\theta_k) = x \cos \theta_k - y \frac{k}{ke} \frac{\sin \theta_k \cos \theta_k}{\cos \theta_k^e} - y_c \sin \theta_k, \quad (5.12b)$$

De même, l'expression de la dérivée seconde h'' est :

$$h''(\theta_k) = -x \sin \theta_k - y \frac{k}{ke} \frac{\cos^2 \theta_k}{\cos^3 \theta_k^e} + y \tan \theta_k^e \sin \theta_k - y_c \cos \theta_k. \quad (5.13)$$

On notera $\bar{\theta}$ l'angle de propagation dans le milieu sédimentaire tel que $h'(\bar{\theta}) = 0$, et $\bar{\theta}^e$ l'angle de propagation dans l'eau qui est associé à $\bar{\theta}$. Nous avons donc la relation :

$$x \cos \bar{\theta} - y \frac{k}{ke} \frac{\sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta}}{\cos \bar{\theta}^e} - y_c \sin \bar{\theta} = 0. \quad (5.14a)$$

C'est à dire :

$$x = y \tan \bar{\theta}^e + y_c \tan \bar{\theta}. \quad (5.14b)$$

D'un point de vue physique, les angles $\bar{\theta}$ et $\bar{\theta}^e$ s'interprètent comme étant réciproquement l'angle d'incidence et de réfraction d'un rayon issu du centre du cylindre C et arrivant au point d'observation M situé aux coordonnées (x, y) , voir figure 5.3.

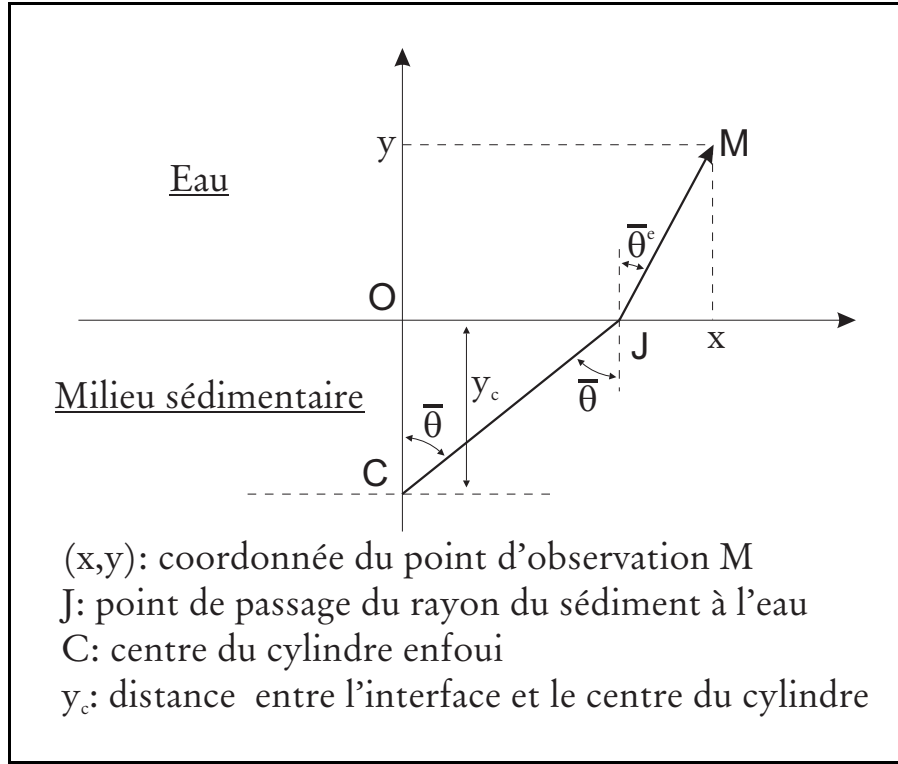
Si on note J le point de passage de rayon du milieu sédimentaire à l'eau et x_J son abscisse, la relation 5.8, issue des lois de Snell-Descartes, impose que :

$$k^2 \frac{x_J^2}{x_J^2 + y_c^2} = ke^2 \frac{(x - x_J)^2}{(x - x_J)^2 + y^2}. \quad (5.15)$$

L'abscisse x_J est donc une solution d'une équation du quatrième degré dont les paramètres sont k , ke , x , y et y_c . x_J peut ainsi être calculé rapidement et de manière exacte en fonction de l'observateur. Une fois le terme x_J calculé, on en déduit aisément les valeurs de $\bar{\theta}$ et $\bar{\theta}^e$:

$$\sin \bar{\theta} = \frac{x_J}{\sqrt{x_J^2 + y_c^2}} \quad \text{et} \quad \cos \bar{\theta} = \frac{y_c}{\sqrt{x_J^2 + y_c^2}}, \quad (5.16a)$$

$$\sin \bar{\theta}^e = \frac{(x - x_J)}{\sqrt{(x - x_J)^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \cos \bar{\theta}^e = \frac{y}{\sqrt{(x - x_J)^2 + y^2}}, \quad (5.16b)$$

FIG. 5.3 – Interprétation physique des angles $\bar{\theta}$ et $\bar{\theta}^e$

Nous pouvons maintenant écrire :

$$\Psi_n^{st} \simeq \left(\frac{\pi}{2kh''(\bar{\theta})} \right)^{1/2} g_n(\bar{\theta}) e^{ikh(\bar{\theta}) + i\pi/4}, \quad (5.17a)$$

si $h''(c) > 0$, et :

$$\Psi_n^{st} \simeq \left(\frac{\pi}{-2kh''(\bar{\theta})} \right)^{1/2} g_n(\bar{\theta}) e^{ikh(\bar{\theta}) - i\pi/4}, \quad (5.17b)$$

si $h''(c) < 0$.

Finalement, l'onde cylindrique diffusée \mathbf{P}_{cyl} par le cylindre est sous la forme d'une série modale connue :

$$\mathbf{P}_{cyl} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \Psi_n^s. \quad (5.18)$$

Pour un observateur donné M , nous pouvons calculer la valeur du paramètre x_J correspondant et connaître les valeurs des angles $\bar{\theta}$ et $\bar{\theta}^e$. Le champ acoustique \mathbf{P}_{cyl}^t reçu par M , transmis à l'eau et issu de l'onde diffusée par le cylindre sera alors égal à :

$$\mathbf{P}_{cyl}^t \simeq \left(\frac{\pi}{2kh''(\bar{\theta})} \right)^{1/2} e^{ikh(\bar{\theta}) + i\pi/4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n(\bar{\theta}), \quad (5.19a)$$

si $h''(c) > 0$, et :

$$\mathbf{P}_{cyl}^t \simeq \left(\frac{\pi}{-2kh''(\bar{\theta})} \right)^{1/2} e^{ikh(\bar{\theta})-i\pi/4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n(\bar{\theta}) , \quad (5.19b)$$

si $h''(c) < 0$.

On remarquera enfin que :

$$g_n(\bar{\theta}) = g_0(\bar{\theta}) e^{in(\bar{\theta}-\pi/2)} , \quad (5.20)$$

et que :

$$g_0(\bar{\theta}) = CT_{sediment-eau} = \frac{2 \frac{\rho_e}{\rho_s} \cos \bar{\theta}}{\frac{\rho_e}{\rho_s} \cos \bar{\theta} + \frac{k_e}{k} \cos \bar{\theta}^e} , \quad (5.21)$$

où ρ_e et ρ_s sont respectivement les masses volumiques de l'eau et du milieu sédimentaire.

Dans ces conditions l'expression du champ acoustique \mathbf{P}_{cyl}^t perçu au point M se calcule très rapidement connaissant l'angle $\bar{\theta}$:

$$\mathbf{P}_{cyl}^t \simeq \left(\frac{\pi}{2kh''(\bar{\theta})} \right)^{1/2} e^{ikh(\bar{\theta})+i\pi/4} g_0(\bar{\theta}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in(\bar{\theta}-\pi/2)} , \quad (5.22a)$$

si $h''(c) > 0$, et :

$$\mathbf{P}_{cyl}^t \simeq \left(\frac{\pi}{-2kh''(\bar{\theta})} \right)^{1/2} e^{ikh(\bar{\theta})-i\pi/4} g_0(\bar{\theta}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in(\bar{\theta}-\pi/2)} , \quad (5.22b)$$

si $h''(c) < 0$.

La détermination du champ acoustique total en un point d'observation M est donc, maintenant, parfaitement connue. Nous venons de voir qu'à partir des coordonnées (x, y) du point M , nous pouvons estimer le champ acoustique \mathbf{P}_{cyl}^t . Or, le champ acoustique total \mathbf{P}_{tot} vaut :

$$\mathbf{P}_{tot} = \text{Onde Plane Incidente} + \text{Onde Plane Reflechie} + \mathbf{P}_{cyl}^t . \quad (5.23)$$

5.2 Application numérique

Nous choisirons un tube cylindrique de rayon extérieur $a = 3,572mm$ et de rayon interne $b = 0,9a$ enfoui dans le milieu sédimentaire à $2mm$ de l'interface. En réalité, le cylindre correspond tout à fait à l'exemple numérique traité au chapitre 1 où le milieu fluide entourant le tube (noté alors 1) correspondait déjà au milieu sédimentaire. Les paramètres physiques des vitesses et des densités sont donc :

$$\begin{aligned} \rho_{sediment} &= 1320 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_{sediment} &= 1780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \rho_{tube} &= 2790 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, & c_L &= 6380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, & c_T &= 3100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Les calculs ayant été faits au chapitre 1, nous connaissons parfaitement l'opérateur \mathbf{T} associé à ce cylindre plongé dans le milieu sédimentaire.

De même, l'interface milieu sédimentaire-eau correspond au premier cas traité fluide-fluide du chapitre 3, voir 3.2.1. Les paramètres exacts choisis pour l'eau sont :

$$\rho_{eau} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad c_{eau} = 1470 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (5.25)$$

La célérité des ondes acoustiques dans l'eau c_{eau} est inférieure à la célérité dans le milieu sédimentaire $c_{sediment}$. D'après ce que nous avons vu au chapitre 3, nous nous plaçons dans la situation numérique la plus favorable pour décrire les ondes acoustiques diffusées par le cylindre, en utilisant la méthode des images généralisée.

5.2.1 Configuration harmonique

Nous considérons une onde plane unitaire incidente, normale par rapport à l'interface et de fréquence telle que le produit ka soit égal à 20. L'observateur se situe dans l'eau sur une zone dont l'abscisse est comprise entre $-10ka$ et $+10ka$ et dont l'ordonnée est comprise entre 0 et $+20ka$. Cette zone correspond à la partie en grisé du schéma 5.4.

La figure 5.5 permet de visualiser la norme du champ acoustique total (onde incidente + onde réfléchie + onde diffusée par le cylindre enfoui) reçu par l'observateur.

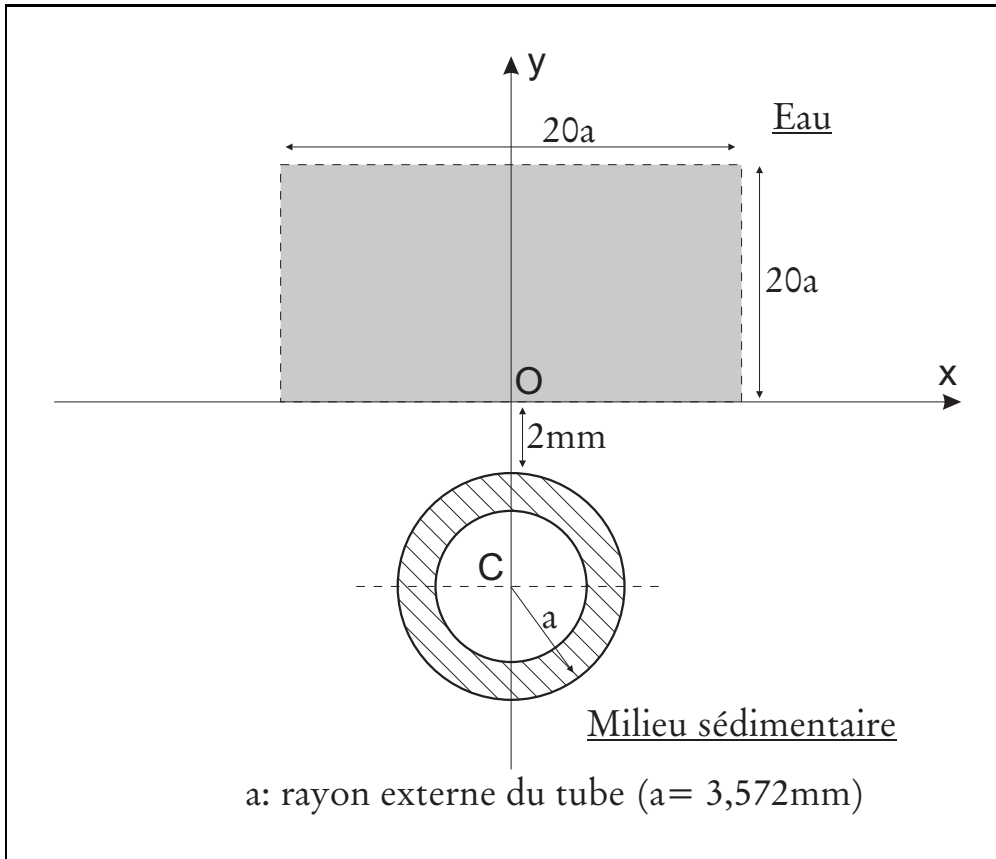


FIG. 5.4 – Schéma représentant la zone cartographiée par la figure 5.5

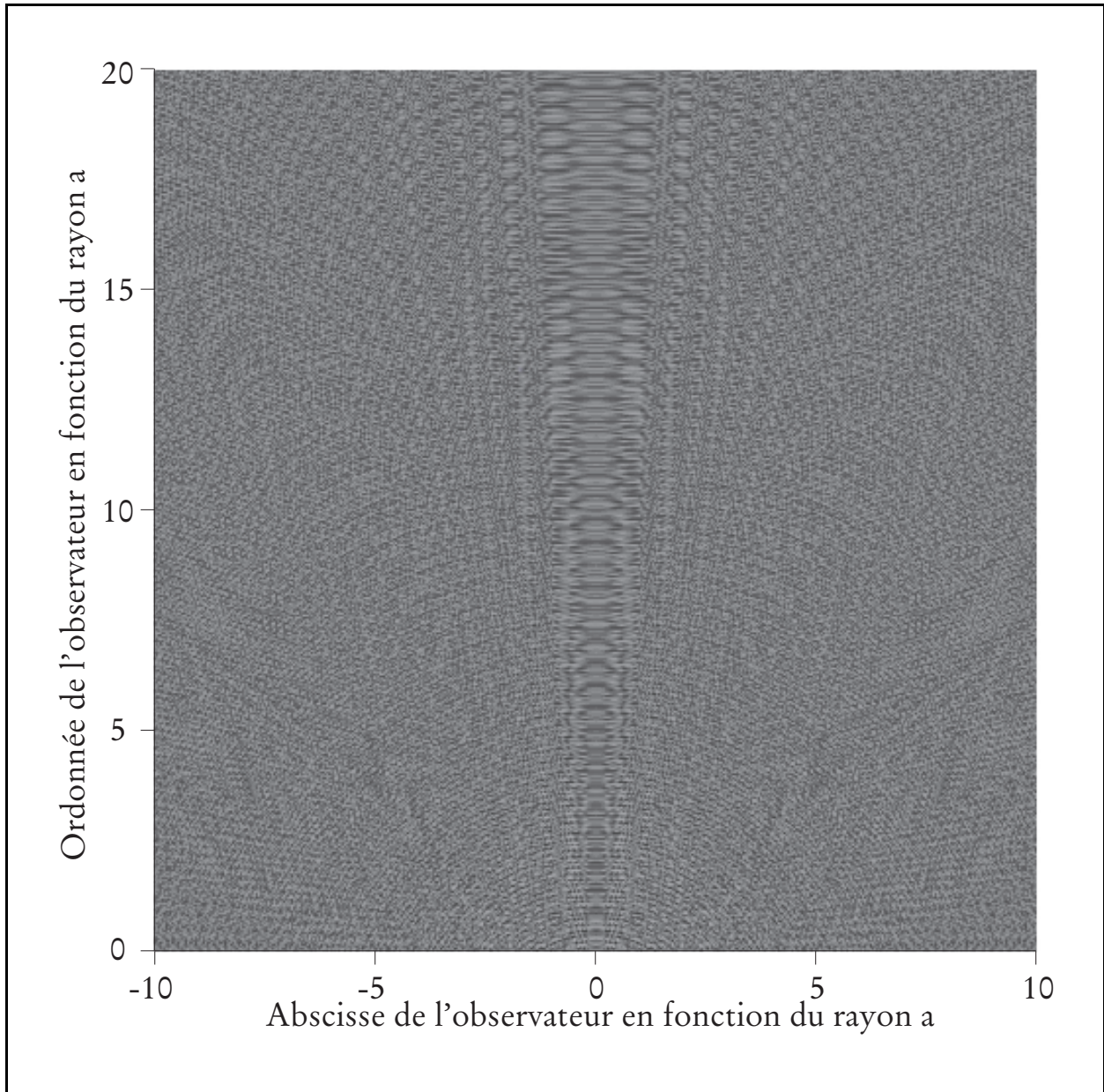


FIG. 5.5 – Cartographie de la norme du champ acoustique dans l'eau au dessus du cylindre enfoui

5.2.2 Configuration à fréquence variable

Nous allons maintenant considérer un observateur fixe situé à une abscisse nulle et une ordonnée $3(a + 2mm)$, voir figure 5.6. En revanche, la fréquence de l'onde plane incidente sera variable et le produit ka sera compris entre 10 et 40.

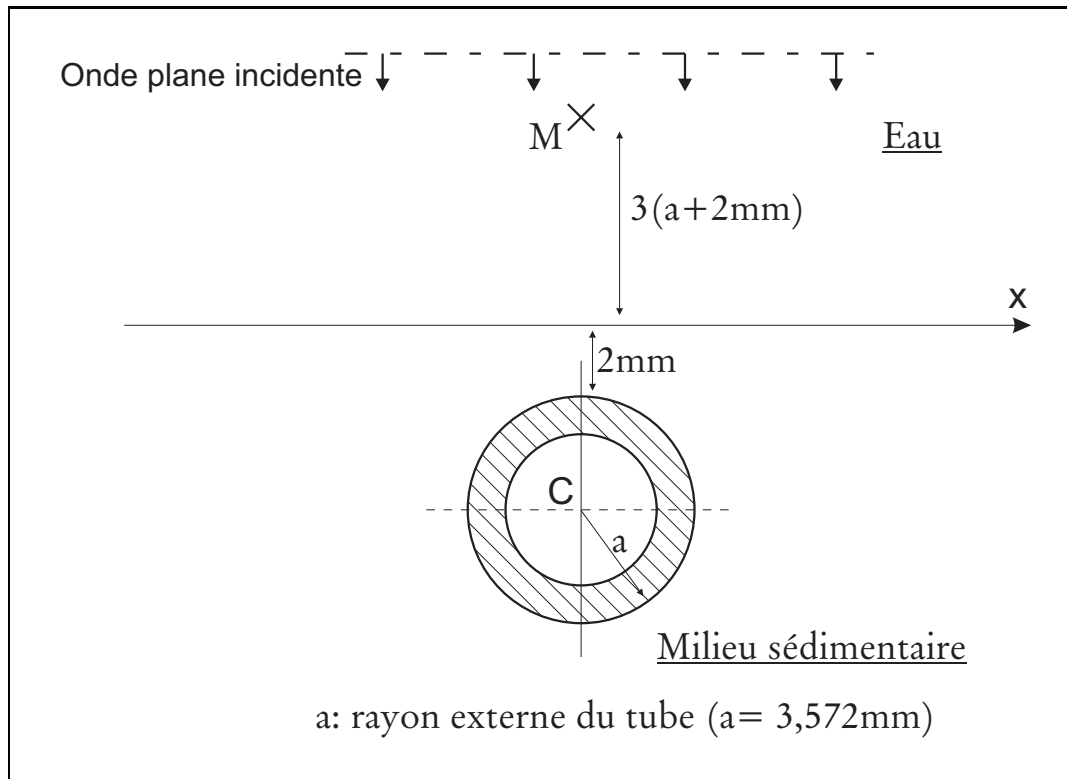


FIG. 5.6 – Schéma indiquant la position de l'observateur fixe

La figure 5.7 indique la valeur de la norme du champ acoustique total reçu par l'observateur en fonction du produit ka . L'onde diffusée par le cylindre a une amplitude assez faible par rapport à l'onde plane incidente et à l'onde plane réfléchie, et il est difficile de distinguer directement l'effet du cylindre enfoui sur le champ acoustique total.

Expérimentalement, il est aisé d'isoler l'onde plane incidente et l'onde plane réfléchie. La figure 5.8 indique la valeur de l'onde diffusée par le cylindre enfoui. Nous pouvons comparer la figure 5.8 à la norme de la fonction de forme du même cylindre en champ libre, voir figure 1.4.

La modélisation théorique permet quant à elle une extraction plus fine de l'information. Par exemple, on peut isoler une à une les interactions interface-cylindre ou isoler la diffusion liée à la nature résonnante du cylindre. La figure 5.9 nous montre ainsi la diffusion du cylindre enfoui de laquelle nous avons soustrait la diffusion par un cylindre rigide enfoui de taille équivalente et positionné au même endroit dans le milieu sédimentaire.

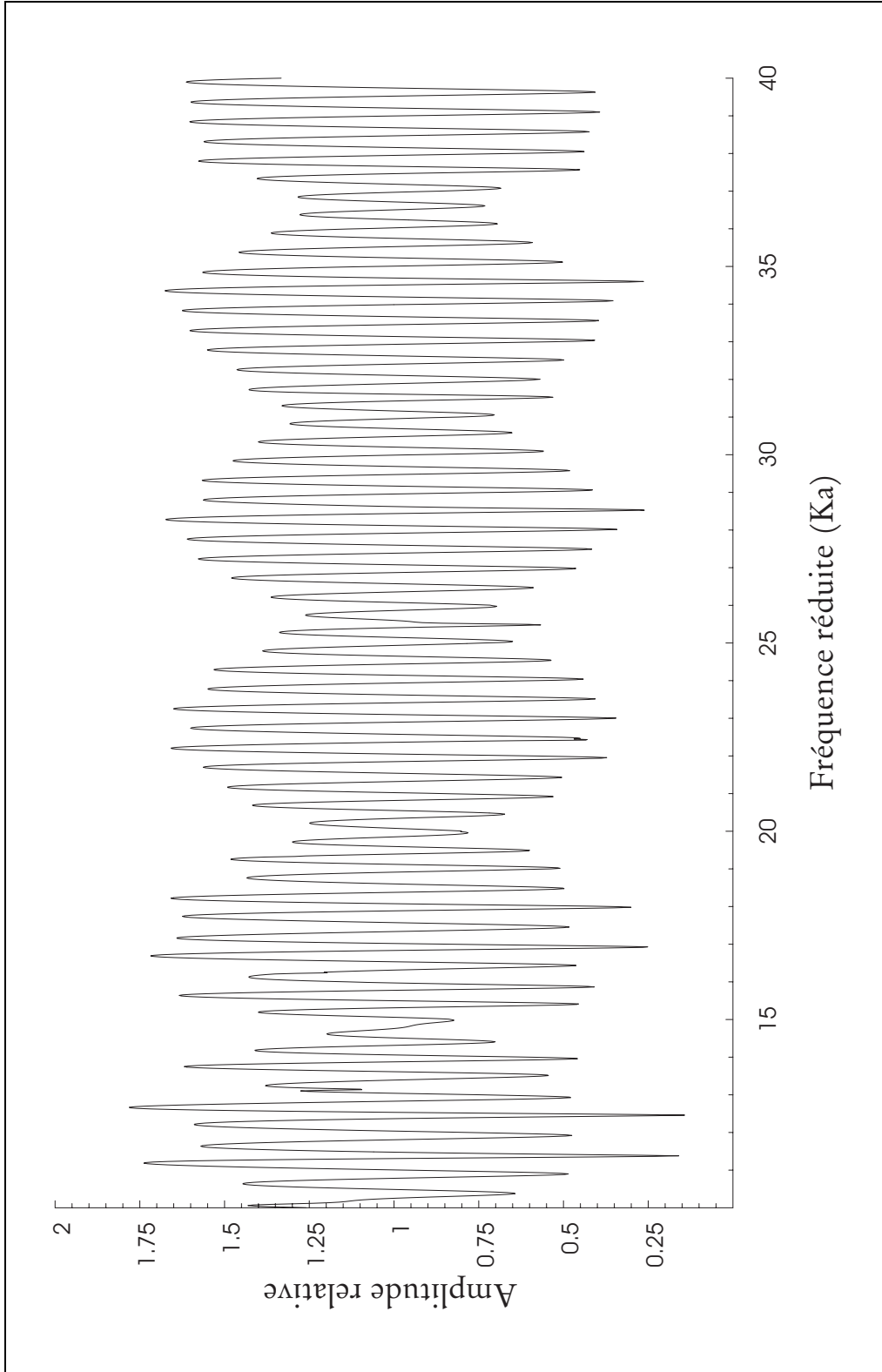


FIG. 5.7 – Norme du champ acoustique total reçu par l'observateur en fonction du produit ka

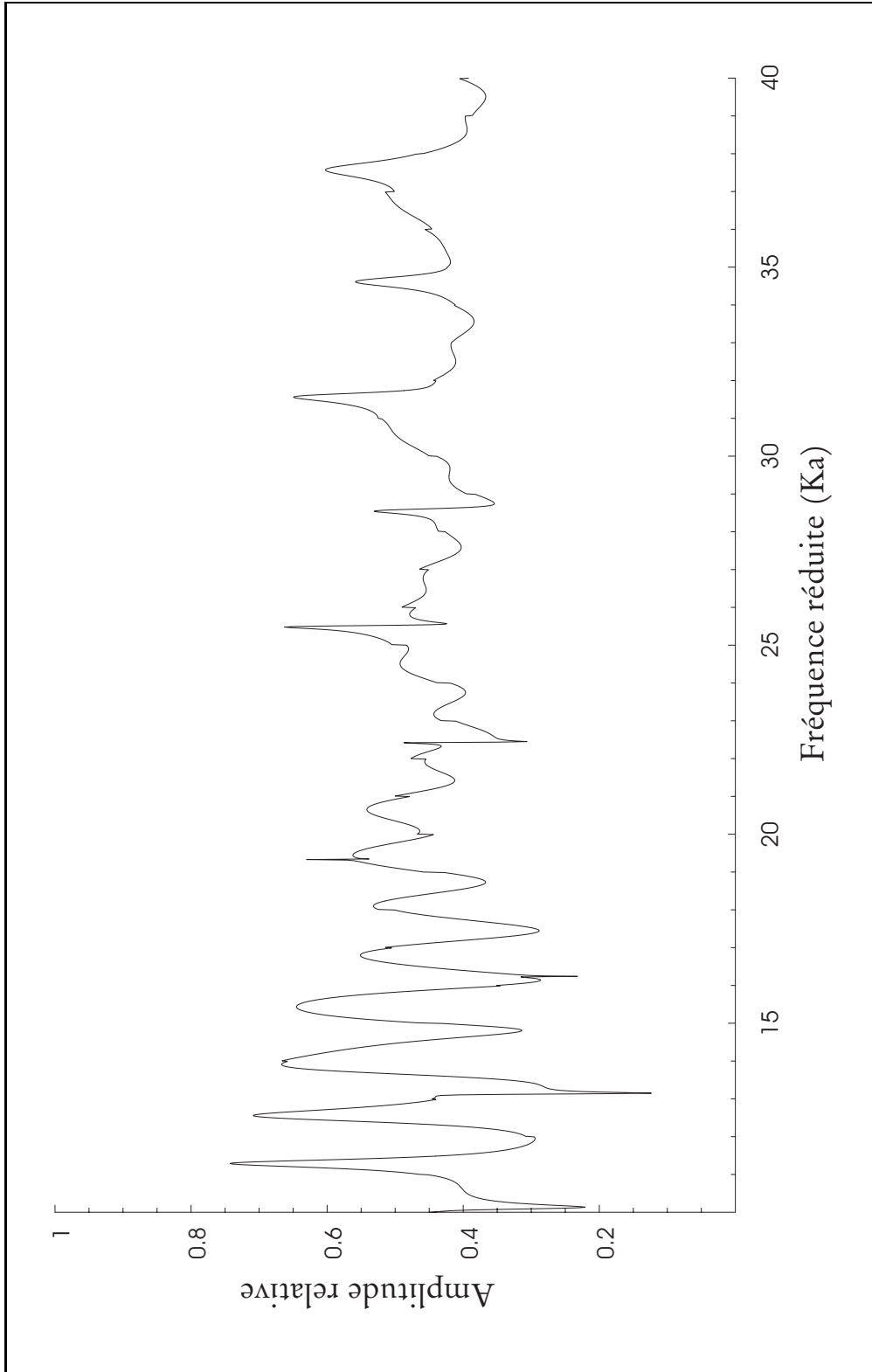


FIG. 5.8 – Norme du champ acoustique diffusé par le cylindre enfoncé en fonction du produit ka

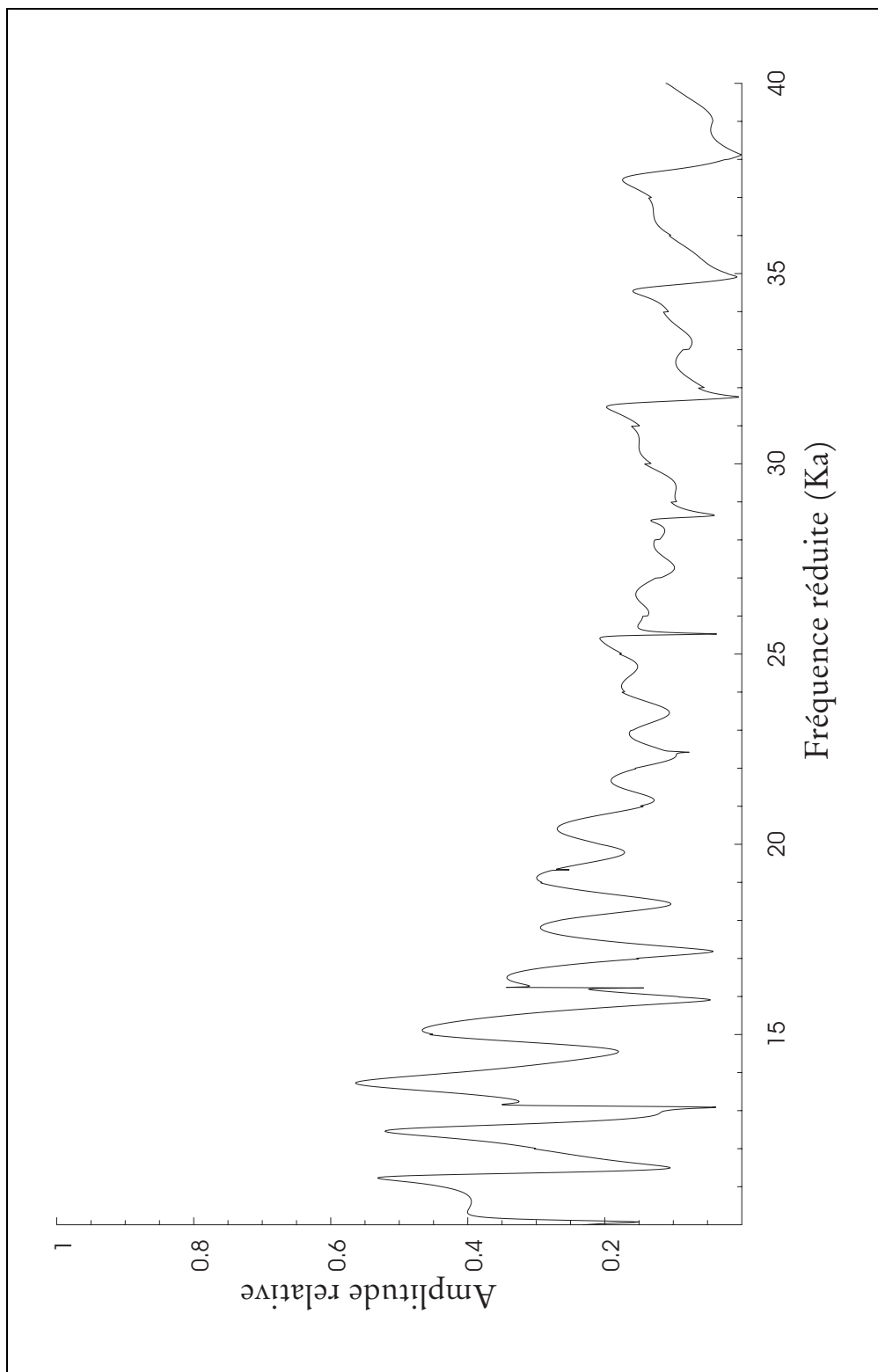


FIG. 5.9 – Extraction de la norme du champ acoustique diffusé lié à la nature résonnante du cylindre enfoncé en fonction du produit ka

Chapitre 6

Étude du cylindre à section non circulaire

Introduction

Au cours du chapitre 1 nous avons vu que la diffusion par un cylindre pouvait se modéliser par l'opérateur linéaire \mathbf{T} . Une onde incidente quelconque exprimée sur la base des fonctions de Bessel, $\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^{(j)} \rangle$, donne lieu à une diffusion par le cylindre, $\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle$, définie sur la base des fonctions cylindriques émergentes. Cette modélisation linéaire concernait, a priori, une classe assez large de cylindres. En particulier, la géométrie de la section du cylindre pouvait prendre des formes très diverses.

Dans les exemples numériques que nous avons traités, la section du cylindre était toujours de forme circulaire. Ce chapitre sera l'occasion de présenter une méthode originale permettant la détermination de l'opérateur \mathbf{T} pour une vaste diversité de formes du cylindre.

Une première partie est consacrée à la présentation générale de cette nouvelle voie appliquée aux cas simples que sont les cylindres rigides et mous. Nous verrons, ainsi, que l'opérateur linéaire \mathbf{T} n'est pas forcément diagonal, comme dans le cas circulaire.

Dans la seconde partie du chapitre, nous développerons une application numérique concrète où la section du cylindre sera elliptique.

6.1 Présentation générale

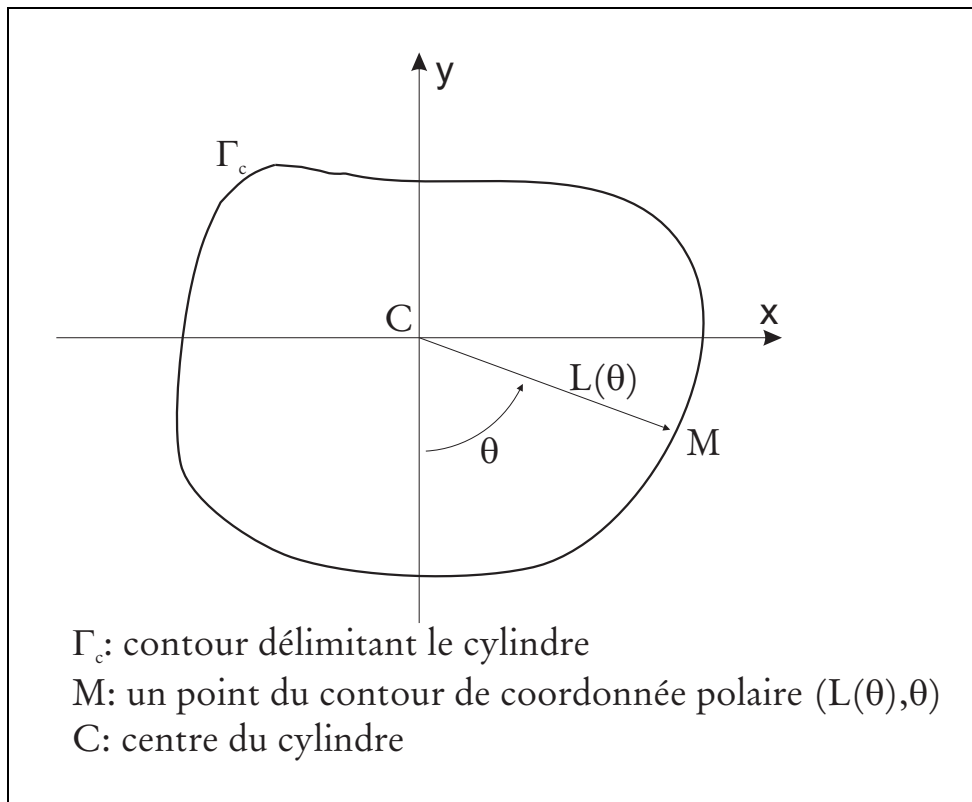


FIG. 6.1 – Coordonnées polaires du contour d'un cylindre

Les cylindres que nous nous proposons d'étudier sont ceux dont le contour Γ_c admet une paramétrisation polaire $L(\theta)$ par rapport à un axe du cylindre, voir figure 6.1. De plus, nous

supposerons qu'à un angle θ donné correspond un seul point du contour Γ_c . Seront donc exclus de cette présentation les géométries correspondant à la situation décrite à la figure 6.2.

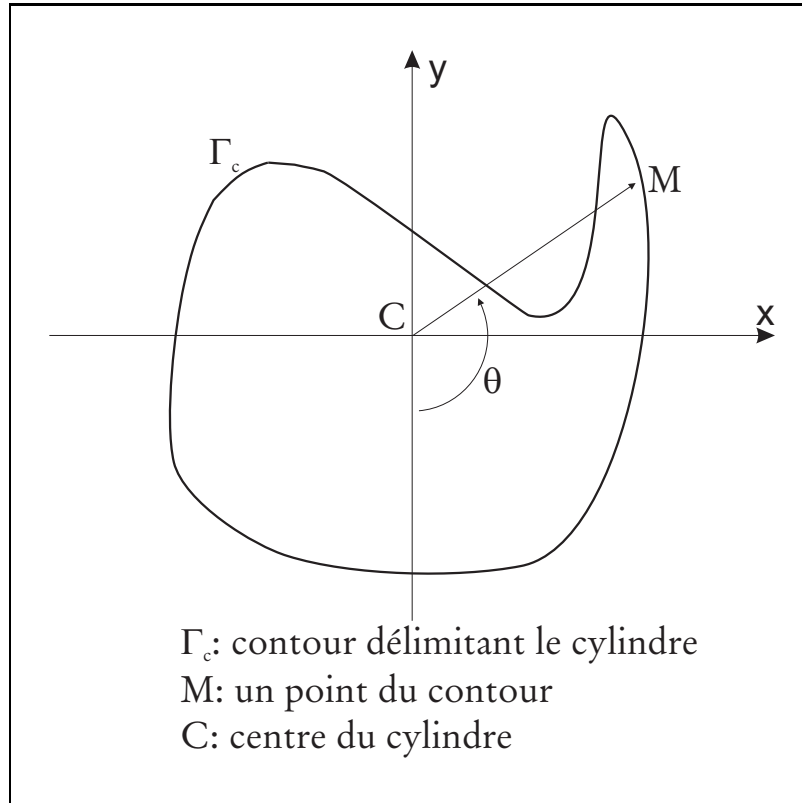


FIG. 6.2 – Configuration cylindrique n'entrant pas dans le cadre de notre étude

Cette restriction reste modeste et les situations les plus fréquemment rencontrées en pratique rentrent dans le cadre de cette étude.

Les conditions d'application étant posées, nous allons, maintenant, chercher à déterminer l'opérateur linéaire \mathbf{T} associé à des cylindres de géométries variées.

6.1.1 Cylindre mou

Par définition, le cylindre mou est tel que la pression au niveau de son contour Γ_c est toujours nulle. Si un champ de pression incident \mathbf{p}_{inc} excite le cylindre mou, alors la pression diffusée par ce cylindre mou \mathbf{p}_{dif} sera telle que, en tout point du contour Γ_c , nous aurons :

$$\mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif} = 0 \quad (6.1)$$

En utilisant les notations du chapitre 1, nous pouvons exprimer l'onde incidente \mathbf{P}_{inc} sur la base des éléments $\Psi_n^{(j)}$:

$$\mathbf{p}_{inc} = \langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^{(j)} \rangle, \quad (6.2)$$

où $\vec{\mathbf{a}}$ est un vecteur donné quelconque.

Par définition de l'opérateur linéaire \mathbf{T} associé au cylindre, l'onde diffusée s'exprime sur la base des éléments Ψ_n :

$$\mathbf{p}_{dif} = \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle. \quad (6.3)$$

En tout point du contour Γ_c , nous avons donc :

$$\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^{(j)} \rangle + \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle = 0 . \quad (6.4)$$

Par hypothèse, tout point du contour Γ_c peut se déterminer sans ambiguïté à partir de ses coordonnées polaires $(L(\theta), \theta)$, et, comme Γ_c est une courbe fermée, à chaque angle θ correspond un point du contour. Sur le contour Γ_c , nous avons $\Psi_n^{(j)} = J_n(kr) e^{in\theta} = J_n(kL(\theta)) e^{in\theta}$ et $\Psi_n = H_n^1(kr) e^{in\theta} = H_n^1(kL(\theta)) e^{in\theta}$, et nous noterons $\Psi_n^{(j)}(\theta) = J_n(kL(\theta)) e^{in\theta}$ et $\Psi_n(\theta) = H_n^1(kL(\theta)) e^{in\theta}$. Nous définirons également les vecteurs $\vec{\Psi}^{(j)}(\theta)$ et $\vec{\Psi}(\theta)$ tels que :

$$\vec{\Psi}^{(j)}(\theta) = \left(\Psi_n^{(j)}(\theta) \right) \quad \text{et} \quad \vec{\Psi}(\theta) = \left(\Psi_n(\theta) \right) . \quad (6.5)$$

Compte tenu de ces nouvelles notations, la condition définissant le cylindre mou devient :

$$\forall \vec{\mathbf{a}}, \forall \theta, \quad \langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^{(j)}(\theta) \rangle + \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}(\theta) \rangle = 0 . \quad (6.6)$$

Par construction, la fonction $L(\theta)$ est une fonction 2π périodique. Par composition, les éléments $J_n(kL(\theta))$ et $H_n^1(kL(\theta))$ sont également des fonctions 2π périodiques, et nous pouvons les décomposer en série de Fourier. Nous poserons ainsi :

$$J_n(kL(\theta)) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta} , \quad (6.7a)$$

et

$$H_n^1(kL(\theta)) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g_{n,p} e^{ip\theta} . \quad (6.7b)$$

Nous avons donc les relations suivantes :

$$\Psi_n^{(j)}(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{i(p+n)\theta} , \quad (6.8a)$$

et

$$\Psi_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g_{n,p} e^{i(p+n)\theta} . \quad (6.8b)$$

En remplaçant dans les expressions précédentes p par $p-n$, nous obtenons aussi les relations :

$$\Psi_n^{(j)}(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p-n} e^{ip\theta} , \quad (6.8c)$$

et

$$\Psi_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g_{n,p-n} e^{ip\theta} . \quad (6.8d)$$

On notera $\vec{\Theta}$ le vecteur des modes de la série de Fourier tel que : $\vec{\Theta} = (e^{ip\theta})$. On définira enfin deux nouveaux opérateurs linéaires \mathbf{F} et \mathbf{G} tels que :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & f_{-2,0} & f_{-2,1} & f_{-2,2} & f_{-2,3} & f_{-2,4} & \ddots \\ \ddots & f_{-1,-1} & f_{-1,0} & f_{-1,1} & f_{-1,2} & f_{-1,3} & \ddots \\ \ddots & f_{0,-2} & f_{0,-1} & f_{0,0} & f_{0,1} & f_{0,2} & \ddots \\ \ddots & f_{1,-3} & f_{1,-2} & f_{1,-1} & f_{1,0} & f_{1,1} & \ddots \\ \ddots & f_{2,-4} & f_{2,-3} & f_{2,-2} & f_{2,-1} & f_{2,0} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (6.9a)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & g_{-2,0} & g_{-2,1} & g_{-2,2} & g_{-2,3} & g_{-2,4} & \ddots \\ \ddots & g_{-1,-1} & g_{-1,0} & g_{-1,1} & g_{-1,2} & g_{-1,3} & \ddots \\ \ddots & g_{0,-2} & g_{0,-1} & g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & \ddots \\ \ddots & g_{1,-3} & g_{1,-2} & g_{1,-1} & g_{1,0} & g_{1,1} & \ddots \\ \ddots & g_{2,-4} & g_{2,-3} & g_{2,-2} & g_{2,-1} & g_{2,0} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6.9b)$$

En utilisant les opérateurs linéaires \mathbf{F} et \mathbf{G} , ainsi que le vecteur $\vec{\Theta}$ que nous venons de définir, l'équation 6.6 peut s'écrire :

$$\forall \vec{\mathbf{a}}, \forall \theta, \quad \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{F} \cdot \vec{\Theta} \rangle + \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \cdot \vec{\Theta} \rangle = 0. \quad (6.10)$$

L'expression étant vraie quelque soit le vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ et quelque soit l'angle θ , nous avons :

$$\mathbf{T} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}^{-1}. \quad (6.11)$$

L'opérateur \mathbf{T} est donc parfaitement déterminé dans le cas du cylindre mou. Nous pouvons remarquer que, dans le cas général, l'opérateur \mathbf{T} n'a aucune raison a priori d'être diagonal ni même d'être symétrique. Toutefois, nous verrons dans l'exemple du cylindre à section elliptique que certaines particularités géométriques éventuelles du contour Γ_c se traduisent par des propriétés de parité et de périodicité sur les fonctions $\Psi_n^{(j)}(\theta)$ et $\Psi_n(\theta)$, ce qui donne également des propriétés particulières aux opérateurs linéaires \mathbf{F} et \mathbf{G} .

Cas du cylindre à section circulaire

On peut remarquer que si le contour Γ_c est circulaire, la fonction $L(\theta)$ est une fonction constante : $\forall \theta, L(\theta) = r_0$. En conséquence, les fonctions $J_n(kL(\theta))$ et $H_n^1(kL(\theta))$ deviennent également des fonctions constantes. Leur décomposition en série de Fourier se résume à un unique terme non nul, et on obtient :

$$\forall n, \quad f_{n,p} = \begin{cases} f_{n,p} = 0 & \text{si } p \neq 0 \\ f_{n,p} = J_n(kr_0) & \text{si } p = 0 \end{cases} . \quad (6.12a)$$

$$\forall n, \quad g_{n,p} = \begin{cases} g_{n,p} = 0 & \text{si } p \neq 0 \\ g_{n,p} = H_n^1(kr_0) & \text{si } p = 0 \end{cases} . \quad (6.12b)$$

Les opérateurs linéaires \mathbf{F} et \mathbf{G} deviennent des opérateurs diagonaux :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ \ddots & J_{-2}(kr_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & J_{-1}(kr_0) & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & 0 & J_0(kr_0) & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & 0 & 0 & J_1(kr_0) & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2(kr_0) & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (6.13a)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ \ddots & H_{-2}^1(kr_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & H_{-1}^1(kr_0) & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & 0 & H_0^1(kr_0) & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & 0 & 0 & H_1^1(kr_0) & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & H_2^1(kr_0) & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6.13b)$$

Dans ces conditions, l'opérateur linéaire \mathbf{T} devient également un opérateur diagonal, et nous avons :

$$T_{nn} = -J_n(kr_0) / H_n^1(kr_0) \quad (6.14)$$

Nous retrouvons ainsi l'expression classique de l'opérateur \mathbf{T} dans le cas d'un cylindre mou.

6.1.2 Cylindre rigide

La propriété caractéristique d'un cylindre rigide est que, en chacun des point du contour Γ_c , le déplacement soit nul. En appliquant les conditions de continuité, cela se traduit, dans le fluide, par le fait que le déplacement normal à Γ_c soit nul (Condition de Neumann).

De la même façon que précédemment, nous allons chercher à identifier l'opérateur linéaire \mathbf{T} . Nous considérons à nouveau que le cylindre est soumis à une onde incidente \mathbf{p}_{inc} , ce qui provoque l'onde diffusée \mathbf{p}_{dif} . Nous noterons $\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif}$ le champ de pression acoustique total :

$$\mathbf{p}_{tot} = \langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^{(j)} \rangle + \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle . \quad (6.15)$$

En utilisant les relations 1.20 et 1.21 rappelées au chapitre 1, le vecteur déplacement $\vec{\mathbf{u}}$ peut s'exprimer à partir du champ de pression \mathbf{p}_{tot} :

$$\vec{\nabla} (\mathbf{p}_{tot}) = -\rho_{ext} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2} , \quad (6.16)$$

où ρ_{ext} est la masse volumique du fluide extérieur.

En supposant que nous nous trouvons en régime harmonique de pulsation ω , nous avons

$$\vec{\nabla} (\mathbf{p}_{tot}) = \omega^2 \rho_{ext} \vec{\mathbf{u}} . \quad (6.17)$$

Dans le repère cylindrique tournant, nous obtenons :

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{\omega^2 \rho_{ext}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{tot}}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{p}_{tot}}{\partial \theta} \end{pmatrix} . \quad (6.18)$$

De plus, le vecteur $\vec{\mathbf{n}}(\theta)$ normal au contour Γ_c dans la direction θ est classiquement donné par :

$$\vec{\mathbf{n}}(\theta) = \begin{pmatrix} L(\theta) \\ -\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Finalement, la propriété caractéristique de rigidité du cylindre se formalise par la nullité du produit scalaire suivant en tout point du contour Γ_c :

$$\forall \theta, \quad \langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{n}}(\theta) \rangle = 0 . \quad (6.20)$$

C'est à dire :

$$\forall \theta, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_{tot}}{\partial r} \cdot L(\theta) - \frac{1}{L(\theta)} \frac{\partial \mathbf{p}_{tot}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 . \quad (6.21)$$

On notera :

$$\Psi_n^{(j) \text{ rigid}} = \frac{\partial \Psi_n^{(j)}}{\partial r} \cdot L(\theta) - \frac{1}{L(\theta)} \frac{\partial \Psi_n^{(j)}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}, \quad (6.22a)$$

$$= \left[kL(\theta) J_n'(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} J_n(kL(\theta)) \right] e^{in\theta}. \quad (6.22b)$$

et aussi :

$$\Psi_n^{\text{rigid}} = \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} \cdot L(\theta) - \frac{1}{L(\theta)} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}, \quad (6.23a)$$

$$= \left[kL(\theta) H_n'^1(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} H_n^1(kL(\theta)) \right] e^{in\theta}. \quad (6.23b)$$

On définira aussi les vecteurs $\vec{\Psi}^{(j) \text{ rigid}}$ et $\vec{\Psi}^{\text{rigid}}$ tels que :

$$\vec{\Psi}^{(j) \text{ rigid}} = \left(\Psi_n^{(j) \text{ rigid}} \right) \quad \text{et} \quad \vec{\Psi}^{\text{rigid}} = \left(\Psi_n^{\text{rigid}} \right). \quad (6.24)$$

La condition de rigidité 6.20 du cylindre peut maintenant s'écrire :

$$\left\langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^{(j) \text{ rigid}} \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi}^{\text{rigid}} \right\rangle = 0. \quad (6.25)$$

A l'image de ce qui a été fait pour le cylindre mou, nous allons chercher à définir deux opérateurs linéaires $\mathbf{F}^{\text{rigid}}$ et $\mathbf{G}^{\text{rigid}}$. Les fonctions $kL(\theta) J_n'(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} J_n(kL(\theta))$ et $kL(\theta) H_n'^1(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} H_n^1(kL(\theta))$ sont 2π périodiques et peuvent être décomposées en série de Fourier :

$$kL(\theta) J_n'(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} J_n(kL(\theta)) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p}^{\text{rigid}} e^{ip\theta}, \quad (6.26a)$$

et

$$kL(\theta) H_n'^1(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} H_n^1(kL(\theta)) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g_{n,p}^{\text{rigid}} e^{ip\theta}. \quad (6.26b)$$

Nous avons donc :

$$\Psi_n^{(j) \text{ rigid}}(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p-n}^{\text{rigid}} e^{ip\theta}, \quad (6.27a)$$

et

$$\Psi_n^{\text{rigid}}(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g_{n,p-n}^{\text{rigid}} e^{ip\theta}. \quad (6.27b)$$

Les opérateurs linéaires $\mathbf{F}^{\text{rigid}}$ et $\mathbf{G}^{\text{rigid}}$ se définissent alors naturellement par :

$$\mathbf{F}^{\text{rigid}} = \left(f_{n,p-n}^{\text{rigid}} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{G}^{\text{rigid}} = \left(g_{n,p-n}^{\text{rigid}} \right). \quad (6.28)$$

Dans ces conditions, la relation de continuité rigide 6.20 s'exprime simplement par l'équation :

$$\forall \vec{\mathbf{a}}, \forall \theta, \quad \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{F}^{rigid} \cdot \vec{\Theta} \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}^{rigid} \cdot \vec{\Theta} \right\rangle = 0 . \quad (6.29)$$

Nous obtenons une expression de l'opérateur \mathbf{T} équivalente à celle correspondant au cylindre mou, voir 6.11 :

$$\mathbf{T} = -\mathbf{F}^{rigid} \cdot \left(\mathbf{G}^{rigid} \right)^{-1} . \quad (6.30)$$

Cas du cylindre à section circulaire

Si le cylindre est à section circulaire, nous avons $L(\theta) = r_0$, et les fonctions $kL(\theta) J'_n(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} J_n(kL(\theta))$ et $kL(\theta) H_n^{I1}(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} H_n^{I1}(kL(\theta))$ se simplifient et deviennent respectivement $kr_0 J'_n(kr_0)$ et $kr_0 H_n^{I1}(kr_0)$.

Les opérateurs \mathbf{F}^{rigid} et \mathbf{G}^{rigid} deviennent également des opérateurs diagonaux, car les coefficients de Fourier $f_{n,p}^{rigid}$ et $g_{n,p}^{rigid}$ se réduisent aux termes constants.

$$\forall n, \quad f_{n,p}^{rigid} = \begin{cases} f_{n,p}^{rigid} = 0 & si \ p \neq 0 \\ f_{n,p}^{rigid} = kr_0 J'_n(kr_0) & si \ p = 0 \end{cases} . \quad (6.31a)$$

$$\forall n, \quad g_{n,p}^{rigid} = \begin{cases} g_{n,p}^{rigid} = 0 & si \ p \neq 0 \\ g_{n,p}^{rigid} = kr_0 H_n^{I1}(kr_0) & si \ p = 0 \end{cases} . \quad (6.31b)$$

L'opérateur \mathbf{T} devient aussi diagonal et nous avons :

$$T_{nn} = -\frac{J'_n(kr_0)}{H_n^{I1}(kr_0)} . \quad (6.32)$$

Nous retrouvons ainsi l'expression classique de l'opérateur \mathbf{T} pour un cylindre rigide à section circulaire.

6.1.3 Cylindre élastique

Dans le cas d'un cylindre élastique, la méthodologie que nous avons appliquée au cylindre mou et au cylindre rigide, peut tout à fait être adaptée, voir l'annexe E. Le problème se complique car les conditions de continuité correspondant au cylindre élastique deviennent plus complexes. Pour les exprimer, nous devons introduire les tenseurs des contraintes du cylindre, et nous aboutissons non plus à une mais à trois équations (six pour une structure tubulaire). Les systèmes linéaires engendrés deviennent très grands et posent donc des difficultés numériques.

De plus, les fonctions à décomposer en séries de Fourier deviennent plus complexes, et la série de Fourier converge beaucoup moins rapidement. En conséquence, les termes diagonaux des opérateurs linéaires ne sont plus réellement prépondérants, ce qui engendre une plus grande instabilité numérique.

En pratique, nous avons constaté qu'une implémentation directe est inexploitable. En particulier, le calcul des termes de chacune des séries requière une trop grande précision. Il n'est toutefois pas exclus qu'une exploitation numérique adéquate rende cette méthodologie viable.

6.2 Application numérique

6.2.1 Relation de récurrence

Le calcul de chacun des coefficients des différentes séries de Fourier est une opération numérique délicate qui demande un temps de calcul relativement long. De plus, le nombre de coefficients à calculer dépendant du carré de la dimension de troncature, les temps de calculs deviennent rapidement prohibitifs quand le produit ka s'élève.

Un moyen de remédier à ce problème est de chercher à mettre en évidence des relations de récurrence qui lient les différents coefficients de Fourier. Pour cela, nous allons utiliser le fait que les fonctions de Bessel possèdent des relations de récurrence bien connues, voir [Wats45].

En effet, si nous notons Z_n une fonction de Bessel générique (J_n, N_n, H_n^1, H_n^2 etc...), nous pouvons écrire la relation de récurrence suivante :

$$\forall z, \quad Z_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} Z_n(z) - Z_{n-1}(z) . \quad (6.33)$$

Par suite, si on définit les coefficients de Fourier $Z_{n,p}$ par :

$$Z_{n,p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} Z_n(kL(\theta)) e^{-ip\theta} d\theta , \quad (6.34)$$

il vient :

$$Z_n(kL(\theta)) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} Z_{n,p} e^{ip\theta} . \quad (6.35)$$

La relation de récurrence 6.33 permet alors d'écrire :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} Z_{n+1}(kL(\theta)) e^{-ip\theta} d\theta = \frac{2n}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \frac{Z_n(kL(\theta))}{kL(\theta)} e^{-ip\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} Z_{n-1}(kL(\theta)) e^{-ip\theta} d\theta \quad (6.36)$$

La relation 6.36 ne nous donne pas directement une relation de récurrence puisque dans la deuxième intégrale intervient la courbure $C(\theta) = 1/L(\theta)$. Pour contourner la difficulté, nous allons décomposer la courbure $C(\theta)$ en série de Fourier car il s'agit clairement d'une fonction 2π périodique. On pose :

$$C(\theta) = 1/L(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{iq\theta} . \quad (6.37)$$

En utilisant cette décomposition en série de Fourier, la relation 6.36 s'écrit :

$$Z_{n+1,p} = \frac{2n}{2k\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[c_m Z_n(kL(\theta)) e^{i(m-p)\theta} \right] d\theta - Z_{n-1,p} . \quad (6.38)$$

En inversant la sommation et l'intégration, on a :

$$Z_{n+1,p} = \frac{2n}{k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m Z_{n,p-m} - Z_{n-1,p} . \quad (6.39)$$

En posant $q = p - m$, on obtient :

$$Z_{n+1,p} = \frac{2n}{k} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{p-q} Z_{n,q} - Z_{n-1,p} . \quad (6.40)$$

Nous définissons alors un nouvel opérateur linéaire \mathbf{C} de la forme :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & c_{-4} & \ddots \\ \ddots & c_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & \ddots \\ \ddots & c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ddots \\ \ddots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} & \ddots \\ \ddots & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} . \quad (6.41)$$

Il est à noter que l'opérateur linéaire \mathbf{C} ne dépend que de la géométrie du cylindre, et plus précisément, il est indépendant de la fréquence.

On définit également les vecteurs $\vec{\mathbf{Z}}_n$ tels que :

$$\vec{\mathbf{Z}}_n = (Z_{n,q}) \quad \text{pour } n \text{ fixe} . \quad (6.42)$$

Ces définitions étant posées, la relation 6.36 devient une relation de récurrence numériquement exploitable :

$$\vec{\mathbf{Z}}_{n+1} = \frac{2n}{k} \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{Z}}_n - \vec{\mathbf{Z}}_{n-1} . \quad (6.43)$$

Cette relation de récurrence permet évidemment de gagner un temps de calcul très important. Connaissant deux vecteurs $\vec{\mathbf{Z}}_n$ et $\vec{\mathbf{Z}}_{n+1}$ (n quelconque), on peut déterminer l'ensemble de tous les coefficients de Fourier. En appliquant cette méthode de récurrence, le nombre de coefficients de Fourier nécessaire devient proportionnel à la dimension de troncature. Nous pouvons alors aborder des calculs où le produit ka est grand.

Application au cylindre mou

Dans le cas du cylindre mou, nous avons considéré les deux fonctions $f_n(\theta) = J_n(kL(\theta))$ et $g_n(\theta) = H_n^1(kL(\theta))$. Ces fonctions ont été décomposées en séries de Fourier :

$$f_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{n,p} e^{ip\theta} , \quad (6.44a)$$

et

$$g_n(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} g_{n,p} e^{ip\theta} . \quad (6.44b)$$

En posant $\vec{\mathbf{f}}_n = (f_{n,q})$ et $\vec{\mathbf{g}}_n = (g_{n,q})$ avec n fixe, nous pouvons appliquer directement la relation de récurrence 6.43 :

$$\vec{\mathbf{f}}_{n+1} = \frac{2n}{k} \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{f}}_n - \vec{\mathbf{f}}_{n-1} . \quad (6.45a)$$

$$\vec{\mathbf{g}}_{n+1} = \frac{2n}{k} \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{g}}_n - \vec{\mathbf{g}}_{n-1} . \quad (6.45b)$$

Application au cylindre rigide

Dans le cas du cylindre rigide, l'application est moins directe. En effet, nous avons considéré les fonctions $f_n^{rigid}(\theta) = kL(\theta) J'_n(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} J_n(kL(\theta))$ et $g_n^{rigid}(\theta) = kL(\theta) H_n^{11}(kL(\theta)) - \frac{in}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} H_n^1(kL(\theta))$. Or dans les fonctions $f_n^{rigid}(\theta)$ et $g_n^{rigid}(\theta)$, le terme n n'intervient pas uniquement comme paramètre de fonctions de Bessel. Nous devons alors considérer :

$$f_n^{rigid\ 1}(\theta) = kL(\theta) J'_n(kL(\theta)) , \quad (6.46a)$$

$$f_n^{rigid\ 2}(\theta) = -\frac{i}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} J_n(kL(\theta)) , \quad (6.46b)$$

$$g_n^{rigid\ 1}(\theta) = kL(\theta) H_n^{11}(kL(\theta)) , \quad (6.46c)$$

$$g_n^{rigid\ 2}(\theta) = -\frac{i}{L(\theta)} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} H_n^1(kL(\theta)) . \quad (6.46d)$$

Et nous avons :

$$f_n^{rigid}(\theta) = f_n^{rigid\ 1}(\theta) + n f_n^{rigid\ 2}(\theta) , \quad (6.47a)$$

$$g_n^{rigid}(\theta) = g_n^{rigid\ 1}(\theta) + n g_n^{rigid\ 2}(\theta) . \quad (6.47b)$$

En considérant que $f_{n,p}^{rigid}$, $f_{n,p}^{rigid\ 1}$, $f_{n,p}^{rigid\ 2}$, $g_{n,p}^{rigid}$, $g_{n,p}^{rigid\ 1}$ et $g_{n,p}^{rigid\ 2}$ sont les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions $f_n^{rigid}(\theta)$, $f_n^{rigid\ 1}(\theta)$, $f_n^{rigid\ 2}(\theta)$, $g_n^{rigid}(\theta)$, $g_n^{rigid\ 1}(\theta)$ et $g_n^{rigid\ 2}(\theta)$, nous posons :

$$\vec{\mathbf{f}}_n^{rigid} = \left(f_{n,q}^{rigid} \right) , \quad \vec{\mathbf{f}}_n^{rigid\ 1} = \left(f_{n,q}^{rigid\ 1} \right) , \quad \vec{\mathbf{f}}_n^{rigid\ 2} = \left(f_{n,q}^{rigid\ 2} \right) , \quad (6.48a)$$

$$\vec{\mathbf{g}}_n^{rigid} = \left(g_{n,q}^{rigid} \right) , \quad \vec{\mathbf{g}}_n^{rigid\ 1} = \left(g_{n,q}^{rigid\ 1} \right) , \quad \vec{\mathbf{g}}_n^{rigid\ 2} = \left(g_{n,q}^{rigid\ 2} \right) . \quad (6.48b)$$

La relation de récurrence 6.43 nous donne alors :

$$\vec{\mathbf{f}}_{n+1}^{rigid\ 1} = \frac{2n}{k} \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{f}}_n^{rigid\ 1} - \vec{\mathbf{f}}_{n-1}^{rigid\ 1} , \quad (6.49a)$$

$$\vec{\mathbf{f}}_{n+1}^{rigid\ 2} = \frac{2n}{k} \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{f}}_n^{rigid\ 2} - \vec{\mathbf{f}}_{n-1}^{rigid\ 2} , \quad (6.49b)$$

$$\vec{\mathbf{g}}_{n+1}^{rigid\ 1} = \frac{2n}{k} \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{g}}_n^{rigid\ 1} - \vec{\mathbf{g}}_{n-1}^{rigid\ 1} , \quad (6.49c)$$

$$\vec{\mathbf{g}}_{n+1}^{rigid\ 2} = \frac{2n}{k} \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{g}}_n^{rigid\ 2} - \vec{\mathbf{g}}_{n-1}^{rigid\ 2} , \quad (6.49d)$$

Avec :

$$\vec{\mathbf{f}}_n^{rigid} = \vec{\mathbf{f}}_n^{rigid\ 1} + n\vec{\mathbf{f}}_n^{rigid\ 2} , \quad (6.50a)$$

$$\vec{\mathbf{g}}_n^{rigid} = \vec{\mathbf{g}}_n^{rigid\ 1} + n\vec{\mathbf{g}}_n^{rigid\ 2} . \quad (6.50b)$$

Malgré une complexité supérieure par rapport au cas du cylindre mou, nous venons d'établir que la relation de récurrence peut très bien s'appliquer au cas du cylindre rigide.

6.2.2 Cas du cylindre à section elliptique

Dans le cadre de notre application numérique, nous allons considérer un cylindre rigide à section elliptique. Le contour elliptique Γ_c aura pour demi-grand axe b et pour demi-petit axe a , voir figure 6.3.

Une expression classique du contour elliptique Γ_c en coordonnées polaires dans le repère lié au centre est :

$$L(\theta) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \theta}} , \quad (6.51)$$

où e est l'excentricité de l'ellipse et est donné par la relation :

$$e^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} . \quad (6.52)$$

Les calculs pour un cylindre rigide faisant également appel à l'expression $\partial L(\theta) / \partial \theta$, on notera que :

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{ae^2}{2} (1 - e^2 \cdot \sin^2 \theta)^{-3/2} \sin 2\theta . \quad (6.53)$$

Les axes de symétrie

L'ellipse comporte deux axes de symétrie Cx et Cy qu'il convient d'exploiter au maximum afin de simplifier la détermination des coefficients des séries de Fourier, ainsi que l'expression des différents opérateurs linéaires.

La symétrie par rapport à Cy impose la parité de la fonction $L(\theta)$ et de ses composées. Les fonctions $\partial L(\theta) / \partial \theta$, $f_n^{rigid}(\theta)$ et $g_n^{rigid}(\theta)$ sont donc également des fonctions paires. Il en découle que :

$$\forall n, \forall p, \quad f_{n,p}^{rigid} = f_{n,-p}^{rigid} , \quad (6.54a)$$

et :

$$\forall n, \forall p, \quad g_{n,p}^{rigid} = g_{n,-p}^{rigid} . \quad (6.54b)$$

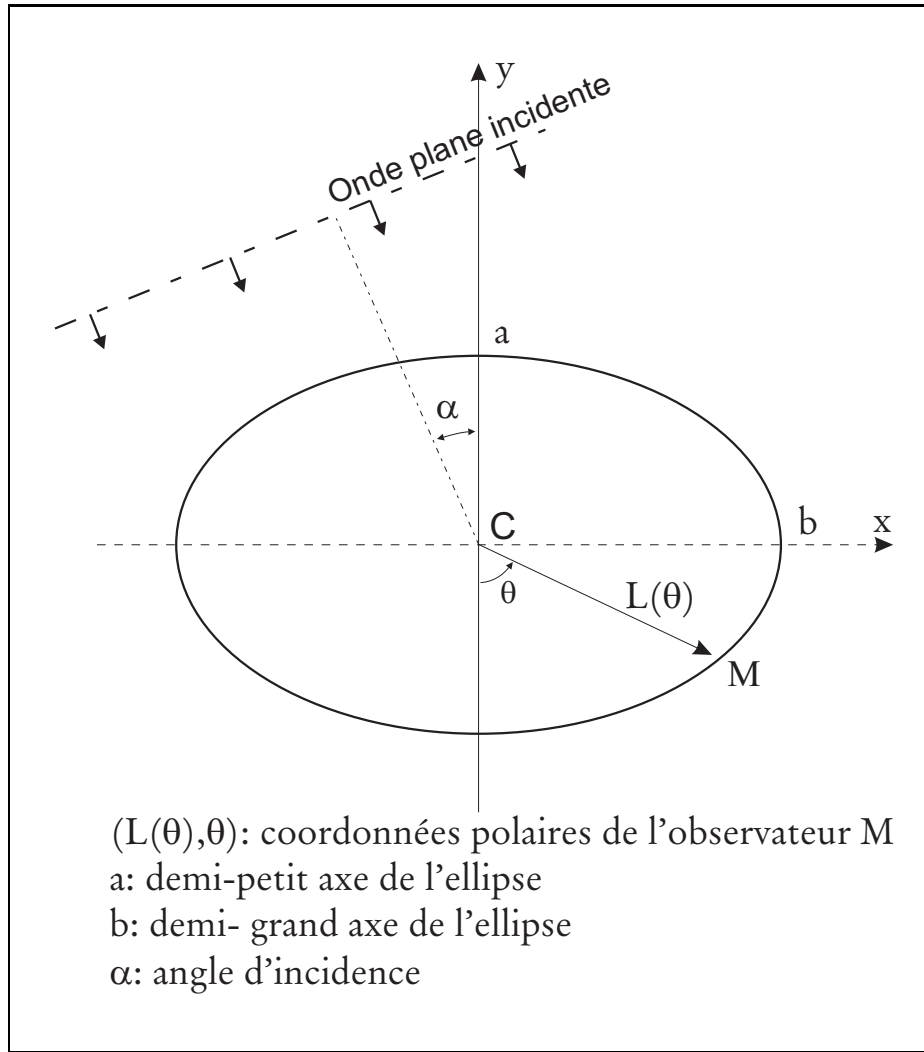


FIG. 6.3 – Vue en coupe du cylindre à section elliptique

De même, la composition des deux symétries selon Cx et Cy impose une périodicité de la fonction $L(\theta) = L(\theta + \pi)$. Cela conduit à la condition :

$$\forall n, \forall p, \quad f_{n,2p+1}^{rigid} = 0, \quad (6.55a)$$

et :

$$\forall n, \forall p, \quad g_{n,p+1}^{rigid} = 0. \quad (6.55b)$$

La prise en compte des axes de symétrie permet donc de réduire considérablement le nombre de coefficients à calculer.

Exemple concret

Nous allons considérer un cylindre rigide à section elliptique tel que le rapport a/b soit de 0,75. L'onde plane incidente sera supposée normale, c'est à dire que l'angle d'incidence α sera nul.

La fréquence de l'onde incidente sera choisie tel que le produit kb soit égal à 5. La figure 6.4 représente la norme du champ acoustique total (onde incidente + onde diffusée par le cylindre) pour un observateur ayant une ordonnée et une abscisse comprises entre $-3b$ et $3b$.

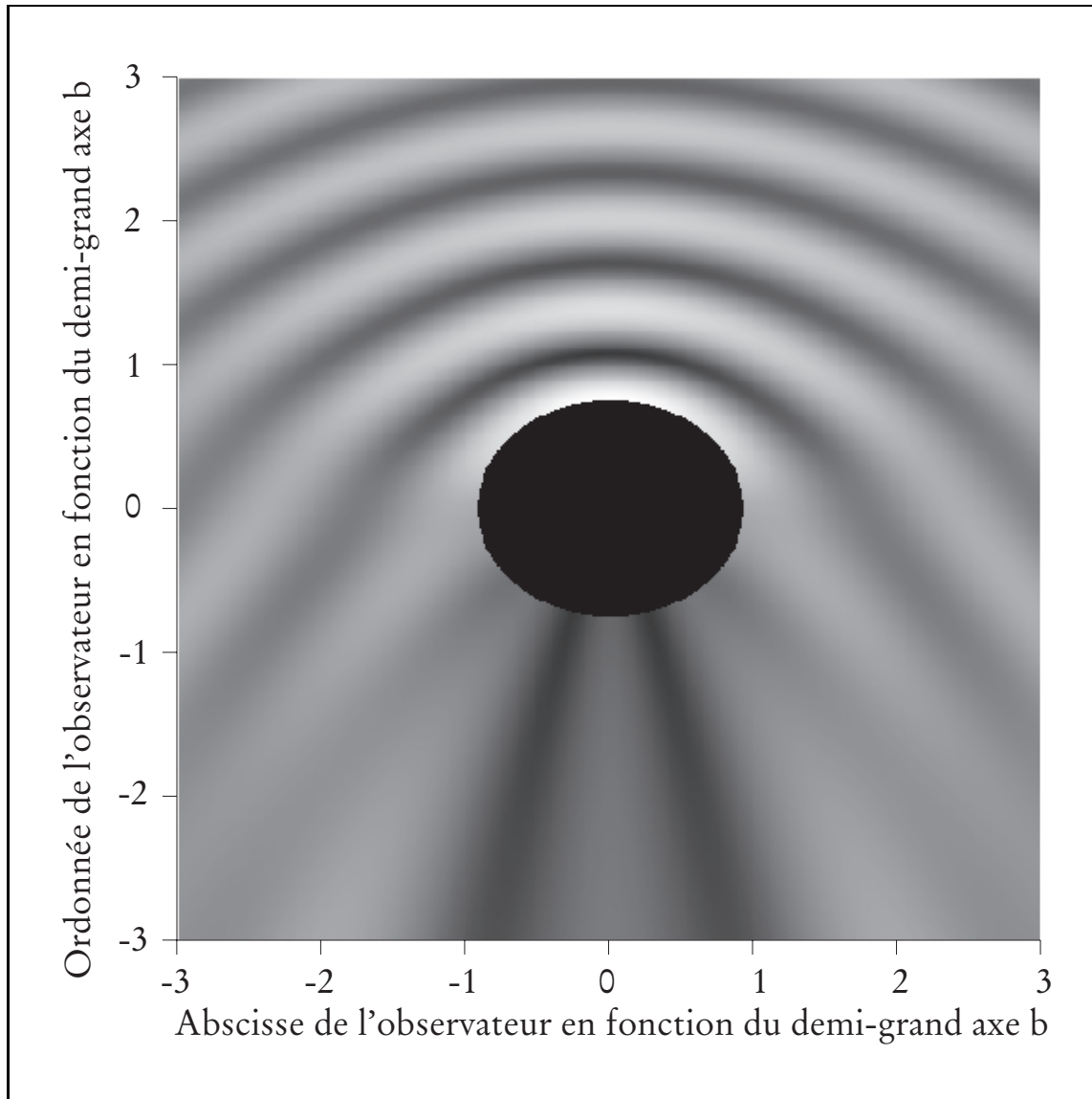


FIG. 6.4 – Cartographie de la norme du champ acoustique dans l'eau au-dessus d'un cylindre à section elliptique

Commentaires

Malgré les relations de récurrence que nous avons pu mettre en évidence, la détermination de l'opérateur \mathbf{T} nécessite des temps de calculs relativement importants. En réalité, l'utilisation de l'opérateur linéaire \mathbf{C} dans les relations de récurrences 6.49a, 6.49a, 6.49a et 6.49a ne doit pas se faire sans contrôler la stabilité numérique des récurrences.

Dans la pratique, nous avons constaté que ces relations de récurrence pouvaient être employées pour un nombre très limité d'itérations, et qu'il fallait réintroduire régulièrement les calculs directs des coefficients de Fourier.

La méthode que nous venons de développer reste donc d'une lourdeur substantielle si l'on envisage le calcul d'un nombre conséquent d'opérateurs linéaires \mathbf{T} (estimation de la fonction de forme par exemple), et ceci est particulièrement vrai pour des dimensions importantes (produit ka élevé).

Toutefois, cette méthode présente le grand intérêt de construire explicitement l'opérateur linéaire \mathbf{T} pour une classe relativement large de cylindres.

Conclusion

L'intérêt immédiat du travail que nous venons de présenter se situe sur le plan de la modélisation numérique. La méthode des images généralisée nous a permis de développer des algorithmes capables de traiter une configuration complexe, tout en étant susceptibles d'être implémentés sur des outils informatiques légers. De plus, le formalisme algébrique contribue à en donner un caractère formellement simple et intuitif.

Ce mémoire ne se résume pas non plus à la description d'une méthode et des algorithmes qui en découlent. Il donne également les limites théoriques de ces méthodes et en précise les champs d'applications (nature de l'interface, proximité du champ acoustique étudié etc..). Enfin, il offre à l'utilisateur des moyens simples, convergence de série ou étude de singularité, pour estimer la précision numérique des algorithmes proposés dans une configuration physique donnée.

En pratique, la méthode des images généralisée constituera sans doute un outil utile lors d'une première confrontation théorie-expérience. C'est dans cette perspective que nous avons cherché à traiter la situation expérimentale concrète d'un tube enfoui dans un milieu sédimentaire. En réalité, des travaux expérimentaux préliminaires [Bec97] ont montré que le modèle d'interface fluide-fluide que nous avons utilisé n'était qu'une première étape, et que la réalité expérimentale demeurait plus complexe : interface non strictement plane, non homogénéité du milieu sédimentaire ou interface fluide-sédiment non discontinue (continuum du fluide au milieu sédimentaire en passant par des milieux de plus en plus riches en sédiments). Il est toutefois permis de penser qu'il est possible de développer un modèle mieux adapté à la réalité, et que la méthode des images généralisée jouerait alors un rôle important dans la modélisation numérique.

D'un point de vue plus théorique, ce mémoire apporte un développement supplémentaire à la théorie modale appliquée aux situations complexes. Nous avons également pu montrer le lien existant entre la méthode des images généralisée et les méthodes intégrales par le biais d'une expression originale de la fonction de Green. Enfin, nous avons montré toute l'importance de la notion de séries divergentes dans la modélisation. A cet égard, il faut noter que les séries divergentes font l'objet de recherches mathématiques accrues (théorie des résurgences par exemple), et il n'est pas exclu que des apports théoriques viennent enrichir ou donner un éclairage nouveau à la méthode des images généralisée.

Annexes

Annexe A

Singularités du coefficient de réflexion

A.1 Interface fluide-fluide

Le coefficient de réflexion $R(\theta)$ d'une interface fluide-fluide nous est donné par l'expression :

$$R(\theta) = \frac{\rho_2/\rho_1 \cos \theta - \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}}{\rho_2/\rho_1 \cos \theta + \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta}}, \quad (\text{A.1})$$

où $\{c_1, \rho_1\}$ et $\{c_2, \rho_2\}$ sont les vitesses de propagation et les masses volumiques associées respectivement aux milieux 1 et 2.

En supposant que θ appartienne au plan complexe, on pose que :

$$\theta = \theta' + i\theta'' \quad (\text{A.2})$$

avec θ' et θ'' deux valeurs réelles, et nous pouvons utiliser les relations classiques suivantes :

$$\cos \theta = \cos \theta' \cosh \theta'' - i \sin \theta' \sinh \theta'', \quad (\text{A.3a})$$

$$\sin \theta = \sin \theta' \cosh \theta'' + i \cos \theta' \sinh \theta''. \quad (\text{A.3b})$$

A.1.1 Les pôles

Les pôles de la fonction $R(\theta)$ fluide-fluide correspondent à l'annulation du dénominateur de l'expression A.1. Une solution triviale existe si $c_1 = c_2$, car :

$$\rho_2/\rho_1 \cos \theta + \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta} = \rho_2/\rho_1 \cos \theta + \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \rho_2/\rho_1 \cos \theta + |\cos \theta|, \quad (\text{A.4})$$

et $\rho_2/\rho_1 \cos \theta + |\cos \theta| = 0$ implique que $\rho_1 = \rho_2$. Cette solution ne sera bien sûr pas retenue et on supposera que $c_1 \neq c_2$ et $\rho_1 \neq \rho_2$.

Les pôles éventuels de la fonction $R(\theta)$ fluide-fluide vérifient la relation :

$$\rho_2/\rho_1 \cos \theta + \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta} = 0, \quad (\text{A.5a})$$

$$\Rightarrow (\rho_2/\rho_1)^2 \cos^2 \theta = (c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta, \quad (\text{A.5b})$$

$$\Rightarrow (\rho_2/\rho_1)^2 \cos^2 \theta = (c_1/c_2)^2 - 1 + \cos^2 \theta, \quad (\text{A.5c})$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}}. \quad (\text{A.5d})$$

Or, si $\cos \theta = \sqrt{\frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}}$, on a :

$$\rho_2/\rho_1 \cos \theta + \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta} = 0 \quad , \quad (\text{A.6a})$$

$$\Leftrightarrow (\rho_2/\rho_1) \sqrt{\frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}} + \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta} = 0 \quad , \quad (\text{A.6b})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\rho_2/\rho_1)^2 \frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}} + \sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta} = 0 \quad , \quad (\text{A.6c})$$

ce qui est impossible car la somme de deux racines carrées ne peuvent s'annuler.

En revanche, il est aisé de vérifier que $\theta = \pm \arccos \left[-\sqrt{\frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}} \right]$ sont les pôles effectifs de la fonction $R[\theta]$ fluide-fluide.

Le cas le plus courant en physique est celui où le milieu le plus dense est aussi le milieu où se propage le plus rapidement l'onde acoustique. C'est à dire que $c_1/c_2 < 1 \Rightarrow \rho_2/\rho_1 > 1$ ou $c_1/c_2 > 1 \Rightarrow \rho_2/\rho_1 < 1$. Dans ces conditions, $\cos \theta$ est toujours de la forme $-i|X|$ et $X \in \mathbb{R}$.

En utilisant les relations classiques A.3a et A.3b, on obtient que les pôles de la fonction $R[\theta]$ fluide-fluide sont de la forme $\theta = +\pi/2 + \operatorname{arcsinh}(|X|)$ et $\theta = -\pi/2 - \operatorname{arcsinh}(|X|)$, voir figure A.1.

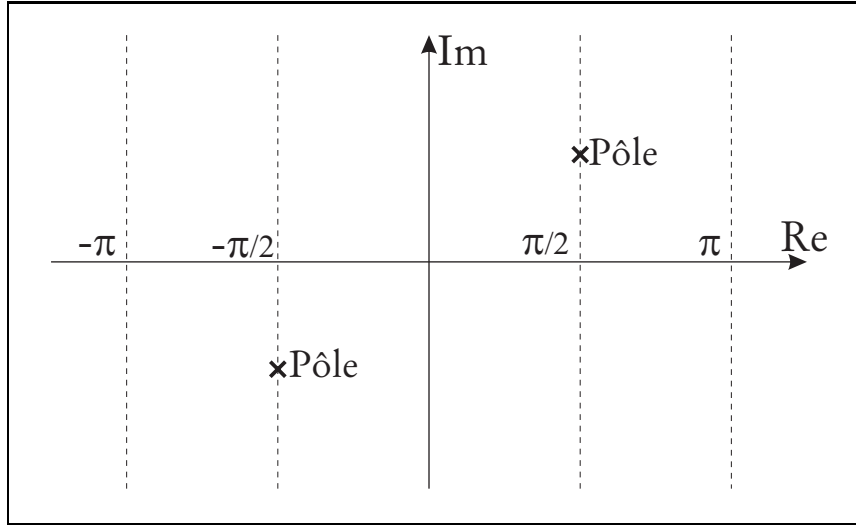


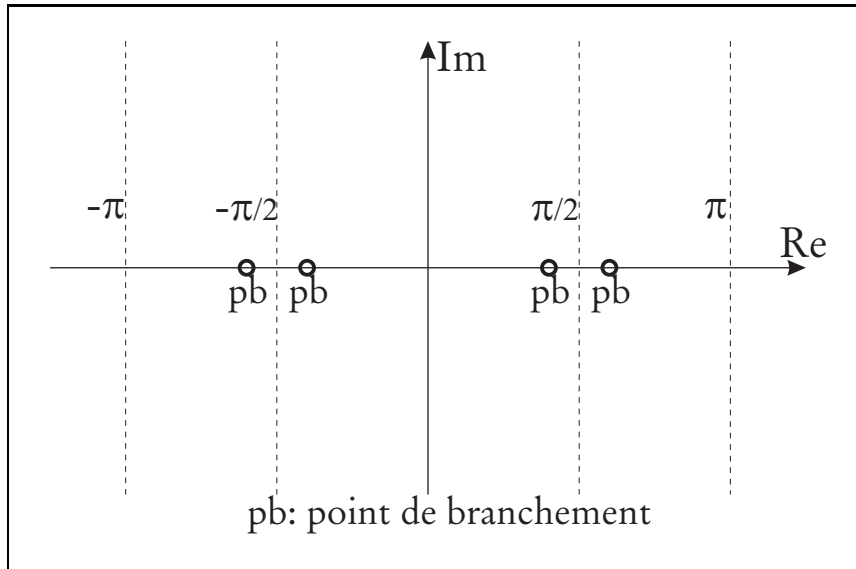
FIG. A.1 – Pôles de la fonction $R(\theta)$ fluide-fluide

A.1.2 Les points de branchement

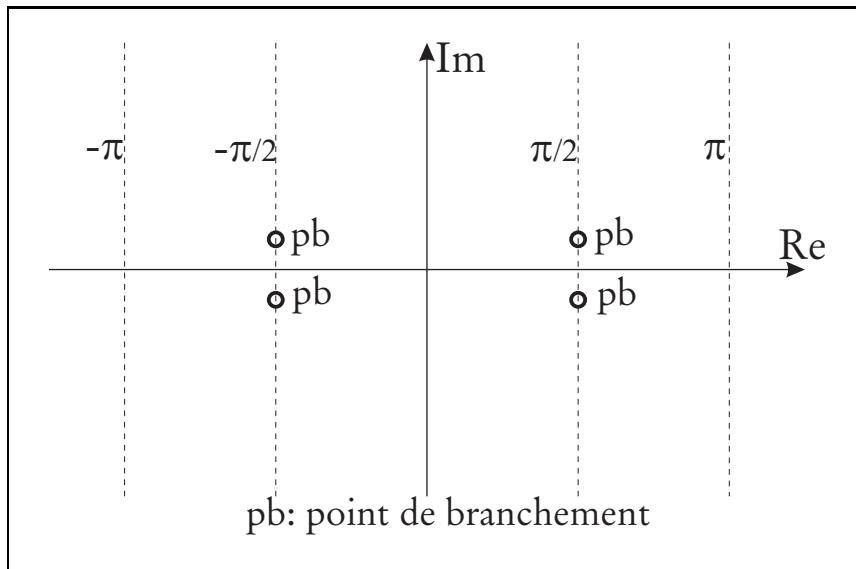
En ce qui concerne la fonction $R[\theta]$ fluide-fluide, les points de branchement correspondent aux points où les racines carrées s'annulent. C'est à dire $\sqrt{(c_1/c_2)^2 - \sin^2 \theta} = 0$.

Cas où $c_1/c_2 < 1$

Les points de branchement sont $\theta = \arcsin(c_1/c_2)$, $\theta = -\arcsin(c_1/c_2)$, $\theta = \pi - \arcsin(c_1/c_2)$ et $\theta = -\pi + \arcsin(c_1/c_2)$, voir figure A.2.

FIG. A.2 – Points de branchements de la fonction $R(\theta)$ fluide-fluide dans le premier cas**Cas où $c_1/c_2 > 1$**

Les points de branchement sont $\theta = \arcsin(c_1/c_2)$, $\theta = -\arcsin(c_1/c_2)$, $\theta = \pi - \arcsin(c_1/c_2)$ et $\theta = -\pi + \arcsin(c_1/c_2)$, voir figure A.3.

FIG. A.3 – Points de branchements de la fonction $R(\theta)$ fluide-fluide dans le second cas

A.2 Interface fluide-solide

Le coefficient de réflexion $R(\theta)$ d'une interface fluide-solide s'exprime sous la forme :

$$R(\theta) = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \theta \left(\left(\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - 2 \sin^2 \theta \right)^2 + 4 \sin^2 \theta \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \right) - \left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^4 \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} \cos \theta \left(\left(\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - 2 \sin^2 \theta \right)^2 + 4 \sin^2 \theta \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} \right) + \left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^4 \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta}} \quad (\text{A.7})$$

$\{c_{L2}, c_{T2}, \rho_2\}$ étant respectivement la vitesse de propagation de l'onde longitudinale et transversale dans le solide et sa masse volumique.

A.2.1 Les pôles

Les pôles de l'expression A.7 sont formés de l'ensemble des zéros du dénominateur. En posant $X = \cos^2 \theta$, la recherche de ces zéros aboutit à la détermination des racines d'un polynôme de degré 8 en X . Cette détermination ne peut se faire que numériquement.

A.2.2 Les points de branchement

De façon identique au cas fluide, les points de branchement correspondent aux points où s'annulent les racines carrées :

$$\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{L2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} = 0, \quad (\text{A.8a})$$

$$\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_{T2}} \right)^2 - \sin^2 \theta} = 0. \quad (\text{A.8b})$$

Ces deux équations fournissent 8 points de branchements répartis comme dans le cas fluide suivant les schémas A.2 et A.3 suivant les valeurs des rapports c_1/c_{L2} et c_1/c_{T2} . La vitesse de propagation de l'onde longitudinale dans le solide étant, sauf cas rarissime, supérieur à la vitesse de l'onde dans le fluide, les points de branchement associés à la première des deux équations seront disposés suivant le schéma A.2.

Annexe B

Fonction de Green : série et intégration

Nous avons vu que la comparaison entre la fonction de Green estimée par une méthode intégrale et par la méthode des images généralisée se réduisait à la comparaison des deux expressions suivantes :

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_S R(\theta_k) e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_S) \cos \theta_k)} d\theta_k, \quad (\text{B.1a})$$

$$E_2(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p i^p \Psi_p^s, \quad (\text{B.1b})$$

Le coefficient de réflexion $R(\theta)$ est ainsi «remplacé» dans l'expression B.1b par sa série de Fourier. L'erreur d'intégration existant entre B.1a et B.1b se compose d'une part d'une erreur sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, et d'autre part d'une erreur sur les branches infinies.

L'erreur d'intégration sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ ne vient que du fait de la troncature de la série de Fourier. En effet, cette dernière converge en tout point de l'axe réel car le coefficient de réflexion est continu. Il est donc facile d'estimer l'erreur d'intégration en utilisant les théorèmes classiques de l'analyse de Fourier [Gas97].

L'erreur commise sur les branches infinies est, quant à elle, plus difficile à quantifier, puisque au delà d'une certaine valeur de la partie imaginaire de θ la série de Fourier diverge.

Si, bien souvent, l'intégration sur les branches infinies donne un résultat tout de même non divergeant, c'est que, sous le signe d'intégration, le coefficient de réflexion est multiplié par $e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_S) \cos \theta_k)}$.

Pour $\theta_k = \pi/2 - It$, $e^{ik(x \sin \theta_k + (y+y_S) \cos \theta_k)}$ devient $e^{ik \cdot x \cosh t} \cdot e^{ik(y+y_S) \sinh t}$. Une série de Fourier tronquée à l'ordre n , tend vers l'infini en e^{nt} quand t tend vers l'infini. La série de Fourier tronquée étant multipliée par le facteur $e^{ik(y+y_S) \sinh t}$, l'intégrale reste convergente. Plus le produit $k(y+y_S)$ est important et moins la divergence de la série de Fourier sera significative numériquement.

On peut aussi noter que plus le produit $k \cdot x$ est élevé et plus la fonction à intégrer devient oscillante. La valeur de l'intégrale sur les branches infinies décroît rapidement pour ne tenir éventuellement compte que de la première demi oscillation, soit une zone extrêmement réduite autour de l'axe réel.

Finalement, les deux expressions B.1a et B.1b peuvent s'identifier si et seulement si les produits $k(y+y_S)$ ou $k \cdot x$ sont suffisamment importants.

Annexe C

Géométrie des rayons

Cette annexe a pour but de calculer les paramètres géométriques de trois rayons, en incidence normale, qui atteignent un observateur positionné entre un cylindre et une interface plane, voir figures C.1, C.2 et C.4. Seul le trajet, situé après le premier point de contact avec le cylindre, sera considéré.

C.1 Premier parcours

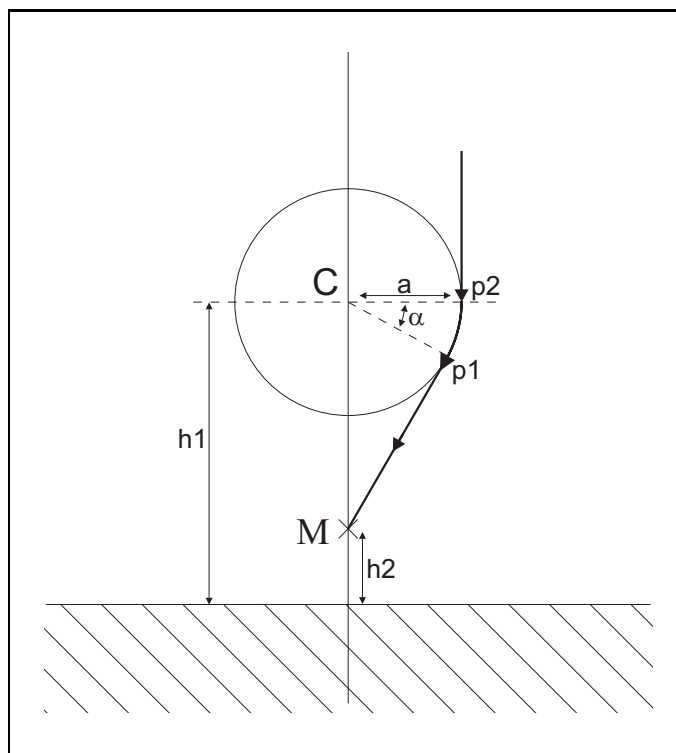


FIG. C.1 – *Premier parcours de rayon*

Dans le cas d'un cylindre rigide, les rayons émis par l'onde de surface (Onde de Franz) sont tangentiels aux cylindres. Géométriquement, le triangle Cp_1M est donc un triangle rectangle en

$p1$. La longueur du trajet externe $L_{ext} = p1M$ s'exprime alors de la façon suivante :

$$L_{ext} = \sqrt{(h1 - h2)^2 - Cp1^2} = \sqrt{(h1 - h2)^2 - a^2} . \quad (C.1)$$

On remarquera également que l'angle α est égal à $\pi/2 - \widehat{MCp1}$ et que $\widehat{MCp1} = \arccos(a / (h1 - h2))$. La longueur L_{surf} du trajet parcouru par l'onde de surface sera alors :

$$L_{surf} = a * (\pi/2 - \arccos(a / (h1 - h2))) . \quad (C.2)$$

C.2 Deuxième parcours

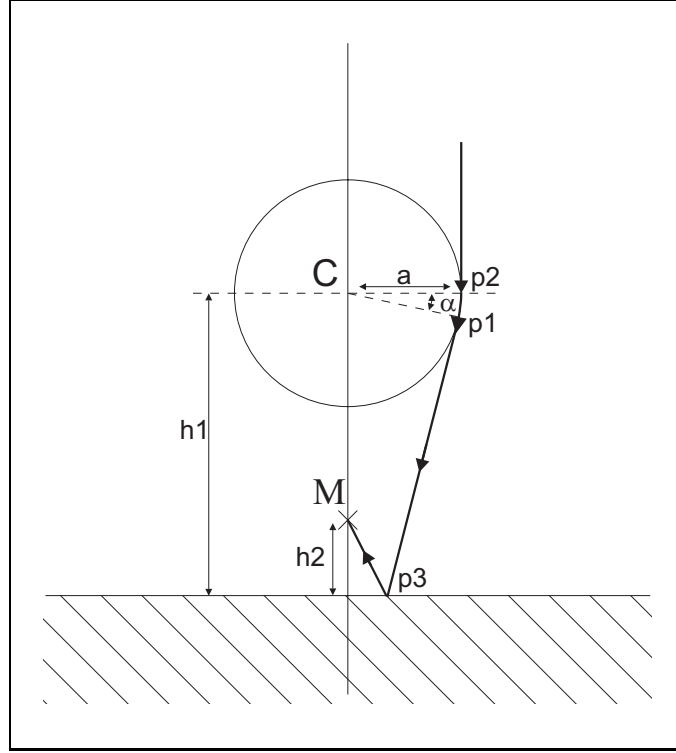


FIG. C.2 – Deuxième parcours de rayon

Le deuxième parcours envisagé peut se ramener au cas précédent en considérant le point M_s , image de M par la symétrie relative à l'interface, voir figure C.3. La distance $p3M_s$ étant égale à $p3M$, les valeurs de L_{ext} et L_{surf} se déduisent alors des formulations du cas précédent en remplaçant dans leur expression $h1$ par $-h1$:

$$L_{ext} = \sqrt{(h1 + h2)^2 - a^2} , \quad (C.3a)$$

$$L_{surf} = a * (\pi/2 - \arccos(a / (h1 + h2))) . \quad (C.3b)$$

On notera enfin que l'angle d'incidence du rayon en $p3$ est α .

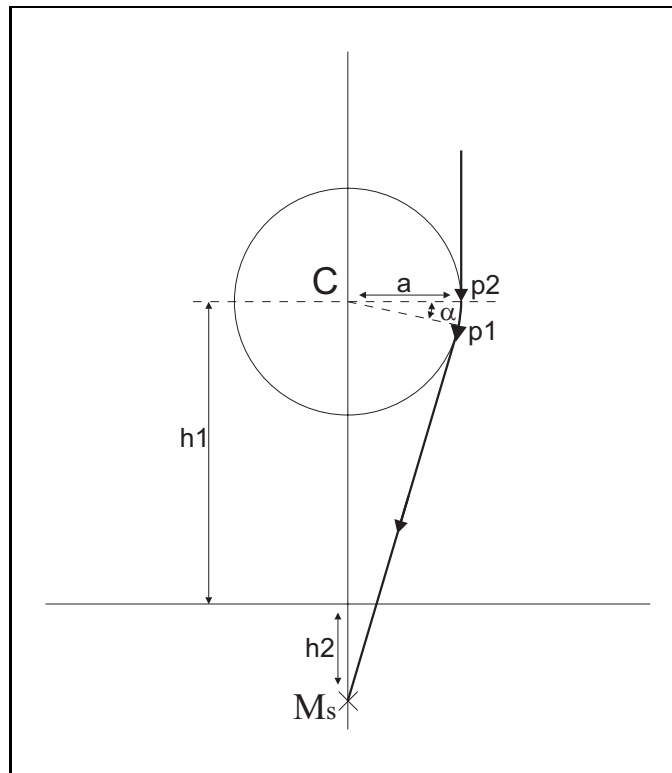


FIG. C.3 – Parcours équivalent à celui de la figure C.2

C.3 Troisième parcours

Le troisième trajet du rayon comprend une réflexion sur l'interface, mais aussi une réflexion sur le cylindre C.4. Tout comme dans le cas précédent, on peut simplifier la configuration en considérant le trajet équivalent défini à partir du point symétrique M_s et du cylindre symétrique centré en C_s , voir figure C.5.

Les paramètres à déterminer sont la longueur du parcours de l'onde de surface L_{surf} , la longueur du parcours de l'onde dans le milieu externe L_{ext} et l'angle d'incidence de l'onde au point $p3$. On remarquera avant tout que la longueur L_{ext} est la somme des deux longueurs $p2p4_s$ et $p4_sM_s$ sur la figure C.5.

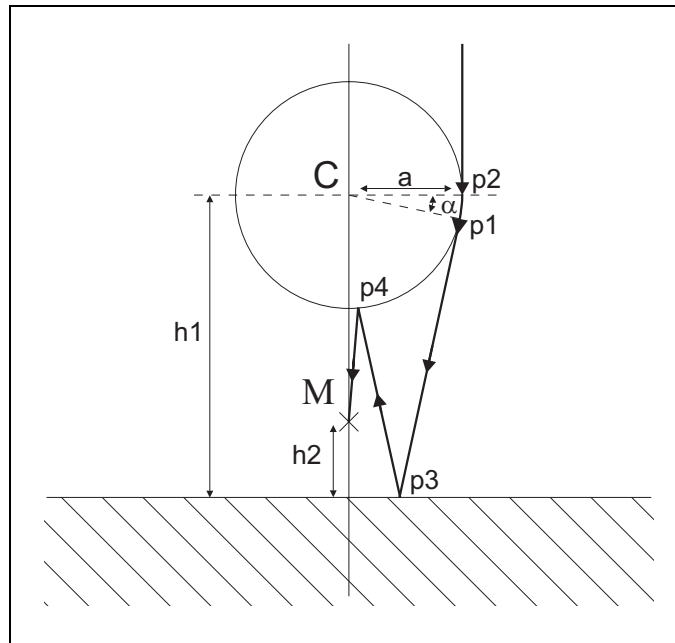


FIG. C.4 – Troisième parcours de rayon

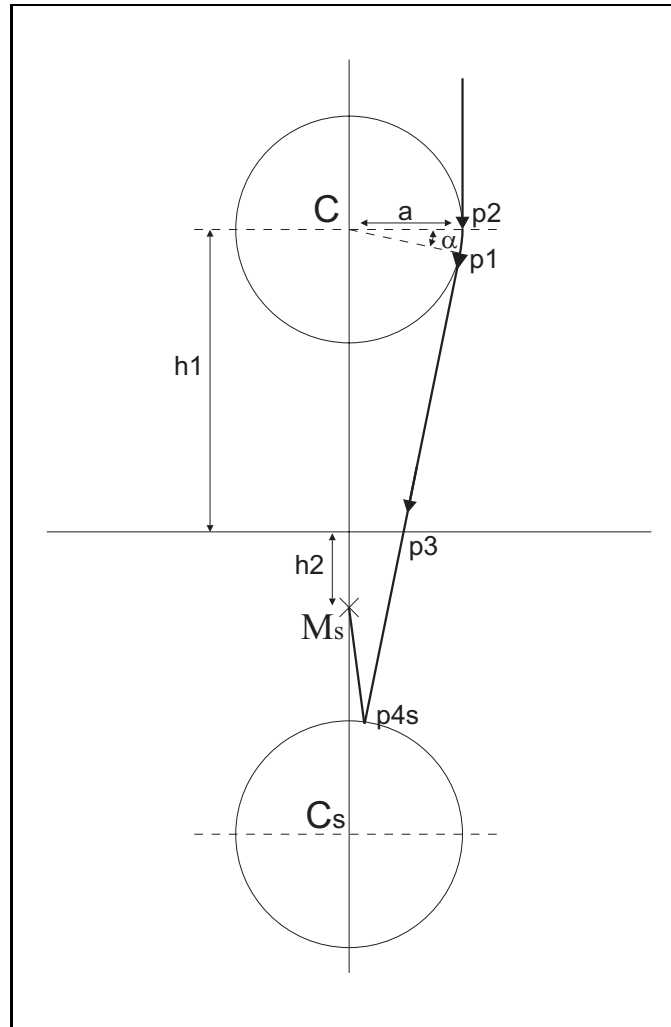


FIG. C.5 – Parcours équivalent à celui de la figure C.4

C.3.1 Première étape : Calcul de la longueur $p2p4_s$

La figure C.6 reprend le parcours équivalent défini à la figure C.5 sous une forme synthétique.

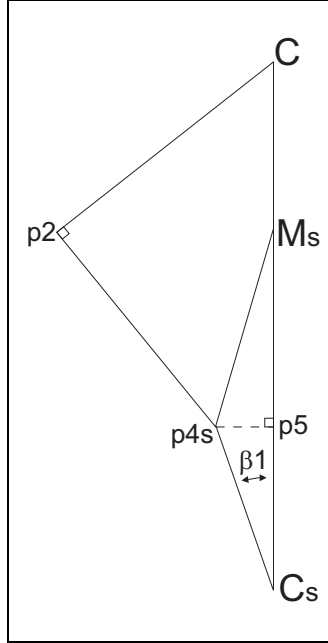


FIG. C.6 – Figure schématique du parcours C.5

Par construction du trajet du rayon, les droites $(p2, C)$ et $(p2, p4_s)$ sont perpendiculaires. Le point $p5$ est la projection orthogonale du point $p4_s$ sur l'axe (C_s, C) . L'angle $\widehat{p4_s C_s M_s}$ sera noté $\beta1$. Les distances CC_s et $C_s M_s$ sont connues. Elles valent respectivement $2h1$ et $h1 - h2$, et elles seront notées Δ et Λ . On rappelle enfin que les longueurs $C_s p4_s$ et $Cp2$ sont égales et valent le rayon du cylindre, c'est à dire a .

Dans ces conditions, on a :

$$p4_s p5 = a \sin \beta1 , \quad (\text{C.4a})$$

$$C_s p5 = a \cos \beta1 , \quad (\text{C.4b})$$

$$Cp5 = \Delta - a \cos \beta1 , \quad (\text{C.4c})$$

$$Cp4_s = \sqrt{(\Delta - a \cos \beta1)^2 + (a \sin \beta1)^2} , \quad (\text{C.4d})$$

et donc, finalement, on a :

$$p2p4_s = \sqrt{Cp4_s^2 - Cp2^2} , \quad (\text{C.5a})$$

C'est à dire :

$$p2p4_s = \sqrt{\Delta^2 - 2\Delta a \cos \beta1} . \quad (\text{C.5b})$$

C.3.2 Seconde étape : Calcul de la longueur $p4_s M_s$

En reprenant les notations précédentes, nous avons :

$$p5M_s = \Lambda - a \cos \beta_1 , \quad (C.6)$$

et :

$$p4_s M_s = \sqrt{p4_s p5^2 + p5 M_s^2} , \quad (C.7a)$$

C'est à dire :

$$p4_s M_s = \sqrt{a^2 + \Lambda^2 - a\Lambda \cos \beta_1} . \quad (C.7b)$$

C.3.3 Détermination de l'inconnue $\cos \beta_1$

Exceptée l'inconnue $\cos \beta_1$, les longueurs $p2p4_s$ et $p4_s M_s$ ont pu être déterminées à partir des éléments connus du problème grâce aux relations C.5b et C.7b. En posant $X = \cos \beta_1$, nous allons maintenant chercher à déterminer l'inconnue X . Pour cela, nous complétons le schéma C.6 en ajoutant quelques points.

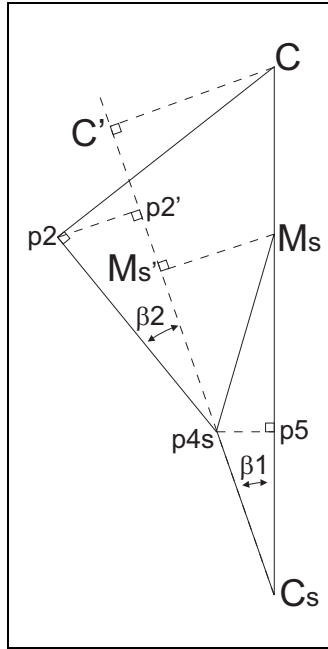


FIG. C.7 – Figure schématique avec les projections

En effet nous allons noter l'angle β_2 entre les axes $(C_s p4_s)$ et $(p4_s p2)$. Les points M'_s , $p2'$ et C' sont les projections orthogonales des points M_s , $p2$ et C sur l'axe $(C_s p4_s)$. Un lien entre l'angle β_1 et l'angle β_2 nous est donné par la relation suivante :

$$\sin \beta_2 = \frac{M'_s M_s}{p4_s M_s} = \frac{\Lambda \sin \beta_1}{p4_s M_s} , \quad (C.8)$$

et

$$\cos \beta_2 = \frac{p4_s M'_s}{p4_s M_s} = \frac{\Lambda X - a}{p4_s M_s} . \quad (C.9)$$

Afin de déterminer X , nous cherchons à mettre une évidence une équation dont X est la seule inconnue. Cette équation nous est donnée par la relation :

$$Cp2^2 = a^2 = (p2p2' + C'C)^2 + (p4_s C' - p4_s p2')^2 , \quad (\text{C.10})$$

or, nous avons :

$$CC' = \Delta \sin \beta 1 , \quad (\text{C.11a})$$

$$p2p2' = p4_s p2 \sin \beta 2 = \sqrt{\Delta^2 - 2a\Delta X} \frac{\Lambda \sin \beta 1}{\sqrt{a^2 + \Lambda^2 - 2a\Lambda X}} , \quad (\text{C.11b})$$

$$p4_s C' = \Delta X - a , \quad (\text{C.11c})$$

$$p4_s p2' = p4_s p2 \cos \beta 2 = p4_s p2 \sin \beta 2 = \sqrt{\Delta^2 - 2a\Delta X} \frac{\Lambda X - a}{\sqrt{a^2 + \Lambda^2 - 2a\Lambda X}} . \quad (\text{C.11d})$$

Ceci nous amène à la relation :

$$\begin{aligned} a^2 = & \left(\Delta + \sqrt{\Delta^2 - 2a\Delta X} \frac{\Lambda}{\sqrt{a^2 + \Lambda^2 - 2a\Lambda X}} \right)^2 (1 - X^2) \\ & + \left(\Delta X - a - \sqrt{\Delta^2 - 2a\Delta X} \frac{\Lambda X - a}{\sqrt{a^2 + \Lambda^2 - 2a\Lambda X}} \right)^2 . \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

En développant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\Delta^2 - 2a\Delta X}{a^2 + \Lambda^2 - 2a\Lambda X} (\Lambda^2 - 2a\Lambda X + a^2) \\ & + \frac{\sqrt{\Delta^2 - 2a\Delta X}}{\sqrt{a^2 + \Lambda^2 - 2a\Lambda X}} (2\Delta\Lambda - 4\Delta\Lambda X^2 + 2a\Delta X + 2a\Lambda X - 2a^2) \\ & + (\Delta^2 - 2a\Delta x) , \end{aligned} \quad (\text{C.13a})$$

ou en simplifiant :

$$0 = 2 (\Delta^2 - 2a\Delta x) + \frac{\sqrt{\Delta^2 - 2a\Delta X}}{\sqrt{a^2 + \Lambda^2 - 2a\Lambda X}} (2\Delta\Lambda - 4\Delta\Lambda X^2 + 2a\Delta X + 2a\Lambda X - 2a^2) . \quad (\text{C.13b})$$

Finalement, nous obtenons une équation du quatrième degré :

$$\begin{aligned} 0 = & (4\Delta^2 \Lambda^2) X^4 + (-4a\Delta^2 \Lambda - 4a\Delta \Lambda^2) X^3 + (-4\Delta^2 \Lambda^2 + a^2 \Delta^2 + 2a^2 \Delta \Lambda + a^2 \Lambda^2) X^2 \\ & + (4a\Delta^2 \Lambda + 4a\Delta \Lambda^2 - 2a^3 \Lambda) X + (-2a^2 \Delta \Lambda + a^4 - a^2 \Delta^2) . \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

En utilisant les formules de Ferrari [Lel78], la valeur exacte de X peut être déterminée, et par des méthodes numériques, sa valeur peut être déterminée rapidement avec une grande précision.

C.3.4 Éléments géométriques du troisième rayon

La longueur du trajet externe du rayon L_{ext} vaut :

$$\begin{aligned} L_{ext} &= p2p4_s + p4_s M_s \\ &= \sqrt{\Delta^2 - 2a\Delta X} + \sqrt{a^2 + \Lambda^2 - a\Lambda X} . \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

En ayant recours au point d'intersection des axes (C, C_s) et $(p2, p4_s)$, on obtient aisément la valeur de l'angle α :

$$\alpha = \beta1 + \beta2$$

La longueur du trajet de rayon sur la surface du cylindre L_{surf} vaut d'après la relation C.9 :

$$L_{surf} = a \left(\arccos X + \arccos \left((\Lambda X - a) / \sqrt{a^2 + \Lambda^2 - 2a\Lambda X} \right) \right) . \quad (\text{C.16})$$

L'angle d'incidence du rayon sur l'interface plane au point $p3$ est clairement égal à α .

Annexe D

Rappels sur la transformation de Sommerfeld-Watson

Le but premier de cette annexe n'est pas de développer la théorie de la transformation de Sommerfeld-Watson, mais d'en rappeler succinctement le principe et surtout d'écrire explicitement les formules utiles aux applications mises en œuvre dans la thèse. Une synthèse détaillée est proposée au chapitre 9 de la référence [Ges87] par André Derem. On pourra également se référer, pour une recherche plus approfondie, à la bibliographie associée à ce chapitre.

La transformation consiste à remplacer une série de la forme :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n F_n(x) , \quad (\text{D.1})$$

par une intégrale de contour dans le plan complexe :

$$p(x) = \frac{i}{2} \int_C \frac{F_\nu(x)}{\sin \pi \nu} d\nu , \quad (\text{D.2})$$

où C est le contour indiqué sur la figure D.1.

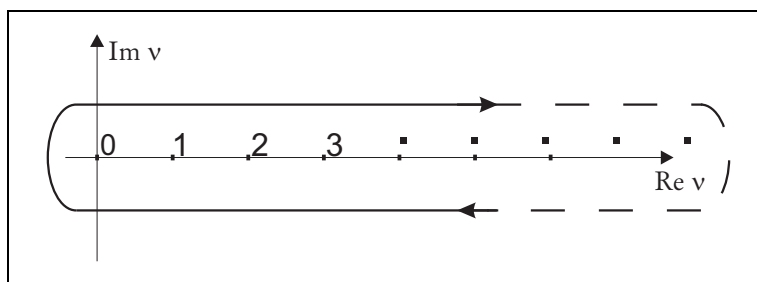


FIG. D.1 – Contour C associé à la transformation de Sommerfeld-Watson

D.1 Application à la diffusion cylindrique

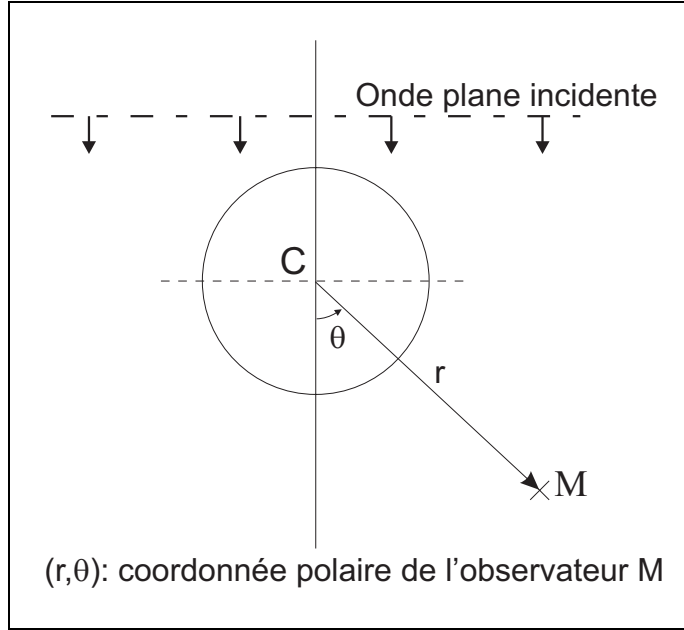


FIG. D.2 – Diffusion par un cylindre d'une onde plane

Si l'opérateur de transition, noté \mathbf{T} , décrivant la diffusion par le cylindre est diagonal, on peut montrer que la diffusion d'une onde plane par ce cylindre, pour un observateur M , voir figure D.2, s'exprime sous la forme :

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n (J_n(kr) + T_{nn} H_n^1(kr)) e^{in\theta} , \quad (\text{D.3})$$

P étant le champ acoustique total perçu par l'observateur M .

En utilisant le facteur de Neumann ε_n , tel que $\varepsilon_n = 1$ si $n = 0$, et $\varepsilon_n = 2$ sinon, on a :

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \varepsilon_n (J_n(kr) + T_{nn} H_n^1(kr)) \cos(n\theta) , \quad (\text{D.4})$$

Par le biais de la transformée de Sommerfeld-Watson, la série D.4 devient une intégrale de contour :

$$P = i \mathbf{princ.} \int_{C'} \frac{\cos(i\nu\theta) e^{-i\nu\pi/2}}{\sin \nu\pi} [J_\nu(kr) + T_{\nu\nu} H_\nu^1(kr)] d\nu . \quad (\text{D.5})$$

Le contour C' diffère du contour C montré à la figure D.2. En réalité, le contour C' passe par le point numéroté 0, et l'intégrale D.5 doit être calculée en valeur principale, ce qu'indique le symbole : **princ.**. Ce changement permet de tenir compte du fait que le coefficient $\varepsilon_n = 1$ pour $n = 0$.

On peut montrer en déformant le contour C' et en analysant les singularités de la fonction sous le signe somme que pour une valeur de kr suffisamment importante, l'intégrale D.5 est

pratiquement égale à :

$$P = i \int_{C_0} \frac{\cos(i\nu\theta) e^{-i\nu\pi/2}}{\sin \nu\pi} T_{\nu\nu} H_{\nu}^1(kr) d\nu . \quad (\text{D.6})$$

C_0 étant un contour du plan complexe qui contient tous les pôles physiques (c'est à dire ayant une partie réelle et imaginaire positive), voir figure D.3.

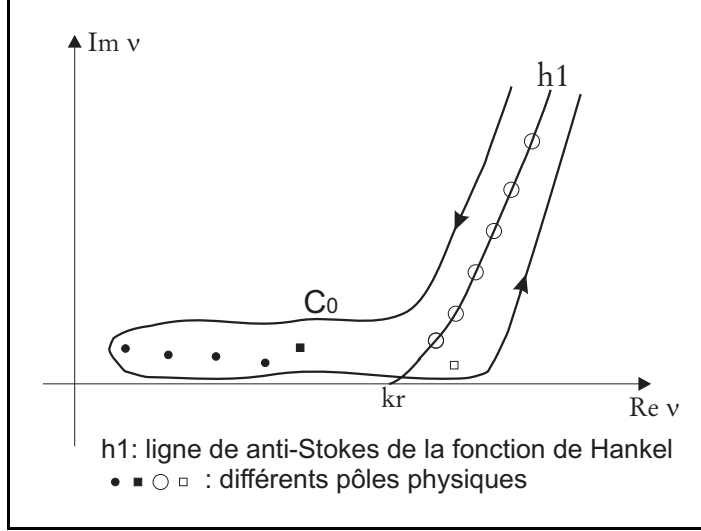


FIG. D.3 – Contour C_0 englobant tous les pôles physiques

D.2 Relation avec les ondes de surface

Chaque pôle ν_l est associé à une onde de surface, et, pour étudier la contribution de chacune des ondes de surface, il suffit, intuitivement, de considérer un contour d'intégration entourant un seul pôle déterminé. En réalité, il faut considérer deux types de pôle et scinder le contour d'intégration C_0 en deux contours distincts C_1 et C_2 , comme indiqué sur la figure D.4.

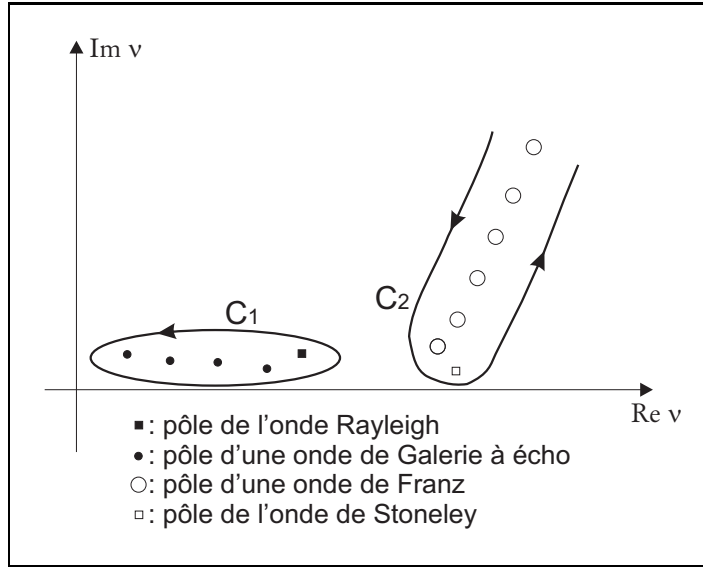
Le premier contour d'intégration C_1 contient les pôles associés aux ondes de Galerie à écho et à l'onde de Rayleigh. Le calcul de la contribution $P_{n\nu_{l1}}$ d'une de ces ondes, dont le pôle est ν_{l1} , ne soulève pas de difficulté théorique, et se déduit en prenant un contour d'intégration $C_{n\nu_{l1}}$ contenant uniquement le pôle ν_{l1} :

$$P_{n\nu_{l1}} = i \int_{C_{\nu_{l1}}} \frac{\cos(\nu\theta) e^{-i\nu\pi/2}}{\sin \nu\pi} T_{\nu\nu} H_{\nu}^1(kr) d\nu , \quad (\text{D.7a})$$

$$P_{\nu_{l1}} = i \frac{\cos(\nu_{l1}\theta) e^{-i\nu_{l1}\pi/2}}{\sin \nu_{l1}\pi} (2\pi i \cdot \text{Res}_{\nu_{l1}}(T_{\nu\nu})) H_{\nu_{l1}}^1(kr) , \quad (\text{D.7b})$$

$$P_{\nu_{l1}} = -2\pi \frac{\cos(\nu_{l1}\theta) e^{-i\nu_{l1}\pi/2}}{\sin \nu_{l1}\pi} \text{Res}_{\nu_{l1}}(T_{\nu\nu}) H_{\nu_{l1}}^1(kr) , \quad (\text{D.7c})$$

où $\text{Res}_{\nu_{l1}}()$ indique le résidu de l'expression au pôle ν_{l1} .


 FIG. D.4 – Décomposition du contour C_0 en deux sous contours C_1 et C_2

En revanche, la situation n'est pas aussi simple pour les pôles contenus dans le contour C_2 (onde de Stoneley et ondes de Franz). Sans précaution, la série obtenue en sommant les contributions de chacun des pôles du contour C_2 ne converge pas obligatoirement. Cela dépend de la position de l'observateur.

Premier cas : L'observateur ne perçoit pas directement l'influence de l'onde incidente (observateur dans l'ombre du cylindre). Alors, pour calculer la contribution d'une onde de surface associée au pôle ν_{l2} , on peut appliquer la même méthode que celle vue précédemment pour les ondes de surface associées aux pôles contenus dans C_1 :

$$P_{\nu_{l2}} = -2\pi \frac{\cos(\nu_{l2}\theta) e^{-i\nu_{l2}\pi/2}}{\sin \nu_{l2}\pi} \text{Res}_{\nu_{l2}}(T_{\nu\nu}) H_{\nu_{l2}}^1(kr) . \quad (\text{D.8})$$

Dans le cas contraire, afin de revenir à une série convergente, on doit appliquer la transformation d'Imai. C'est à dire :

$$\cos \nu\theta = e^{i\nu\pi} \cos \nu(\theta - \pi) - ie^{i\nu(\pi-\theta)} \sin \pi\nu . \quad (\text{D.9})$$

Nous obtenons dans ce cas, une nouvelle expression de la contribution de l'onde de surface associées au pôle ν_{l2} :

$$P_{\nu_{l2}} = -2\pi \frac{\cos(\nu_{l2}(\pi - \theta)) e^{i\nu_{l2}\pi/2}}{\sin \nu_{l2}\pi} \text{Res}_{\nu_{l2}}(T_{\nu\nu}) H_{\nu_{l2}}^1(kr) . \quad (\text{D.10})$$

Annexe E

Diffusion par un cylindre élastique à section non circulaire

E.1 Données du problème

Nous considérons un cylindre dont le contour nous est donné par paramétrisation polaire $r = L(\theta)$, conformément à la figure 6.1. Le vecteur unitaire normal au contour du cylindre est noté $\vec{\mathbf{n}}$. Dans le repère cylindrique, on a :

$$\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} n_r \\ n_\theta \end{pmatrix} . \quad (\text{E.1})$$

Le champ acoustique total se décompose en deux composantes, correspondant à l'onde incidente et à l'onde diffusée : $\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif}$.

Nous avons vu que le champ de pression incident pouvait s'exprimer en toute généralité par :

$$\mathbf{p}_{inc} = \langle \vec{\mathbf{a}}, \vec{\Psi}^{(j)} \rangle , \quad (\text{E.2})$$

et que le champ diffusé par le cylindre était :

$$\mathbf{p}_{dif} = \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{\Psi} \rangle . \quad (\text{E.3})$$

L'opérateur \mathbf{T} étant un opérateur à déterminer.

Le cylindre est composé d'un milieu élastique caractérisé par sa masse volumique ρ_s et des célérités longitudinales et transversales, notée c_L et c_T . Ce cylindre est entouré d'un milieu fluide dont la masse volumique est ρ_f et la célérité c_f .

ω est la pulsation de l'onde incidente. k_L et k_T sont respectivement les modules des vecteurs d'ondes longitudinales et transversales.

E.1.1 Le milieu fluide

Dans le fluide, l'expression du déplacement $\vec{\mathbf{u}}^f$ nous est donnée par la relation :

$$\vec{\mathbf{u}}^f = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{p}_{tot} , \quad (\text{E.4})$$

et le tenseur des contraintes $\sigma^f = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^f & \sigma_{r\theta}^f \\ \sigma_{\theta r}^f & \sigma_{\theta\theta}^f \end{pmatrix}$ est obtenu par la relation :

$$\sigma^f = -\mathbf{p}_{tot}\mathbf{I}, \quad (\text{E.5})$$

où \mathbf{I} est l'opérateur identité.

E.1.2 Le milieu élastique

Dans le solide, le déplacement $\vec{\mathbf{u}}^s$ s'exprime à partir du potentiel scalaire et du potentiel vecteur, notés respectivement Φ et $\vec{\Gamma}$. On a :

$$\vec{\mathbf{u}}^s = -\vec{\nabla}(\Phi) + \vec{\nabla} \wedge \vec{\Gamma}. \quad (\text{E.6})$$

Le potentiel scalaire Φ s'exprime d'une façon générale sous la forme :

$$\Phi = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^L \cdot \vec{\Psi}^{(j)L} \right\rangle, \quad (\text{E.7})$$

l'opérateur \mathbf{A}^L n'étant pas a priori connu. $\vec{\Psi}^{(j)L}$ est un vecteur dont les composantes $\Psi_n^{(j)L}$ valent :

$$\Psi_n^{(j)L} = J_n(k_L r) e^{in\theta}. \quad (\text{E.8})$$

Compte tenu de la géométrie cylindrique, le potentiel vecteur $\vec{\Gamma}$ est un vecteur dont une seule de ses composantes, dans le repère cylindrique, est non nulle : $\Gamma_r = \Gamma_\theta = 0$. Et nous pouvons poser que :

$$\Gamma_z = \frac{1}{\rho_s \omega^2} \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^T \cdot \vec{\Psi}^{(j)T} \right\rangle, \quad (\text{E.9})$$

où l'opérateur \mathbf{A}^T est la troisième inconnue du problème avec \mathbf{A}^L et \mathbf{T} . $\vec{\Psi}^{(j)T}$ est un vecteur dont les composantes $\Psi_n^{(j)T}$ valent :

$$\Psi_n^{(j)T} = J_n(k_T r) e^{in\theta}. \quad (\text{E.10})$$

Le déplacement dans le solide $\vec{\mathbf{u}}^s$ nous est donc donné par :

$$\vec{\mathbf{u}}^s = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Gamma_z}{\partial\theta} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\Gamma_z}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (\text{E.11})$$

En coordonnées cylindriques, le tenseur des contraintes dans le solide $\sigma^s = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^s & \sigma_{r\theta}^s \\ \sigma_{\theta r}^s & \sigma_{\theta\theta}^s \end{pmatrix}$ se détermine à partir des relations :

$$\sigma_{rr}^s = \lambda k_L^2 \Phi + 2\mu \left[-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Gamma_z}{\partial r \partial\theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\Gamma_z}{\partial\theta} \right], \quad (\text{E.12a})$$

$$\sigma_{r\theta}^s = \sigma_{\theta r}^s = \mu \left[\frac{2}{r} \left(-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r \partial\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) - \frac{\partial^2\Gamma_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Gamma_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Gamma_z}{\partial\theta^2} \right], \quad (\text{E.12b})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^s = \lambda k_L^2 \Phi + \frac{2\mu}{r} \left[-\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Gamma_z}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Gamma_z}{\partial r \partial\theta} \right], \quad (\text{E.12c})$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et valent respectivement $\rho_s (c_L^2 - c_T^2)$ et $\rho_s c_T^2$.

E.2 Équations de continuité

Les trois inconnues du problème, \mathbf{A}^L , \mathbf{A}^T et \mathbf{T} , se déduisent en utilisant les équations de continuité en tout point du contour du cylindre.

E.2.1 Continuité du déplacement normal

En tout point du contour $r = L(\theta)$, nous avons que :

$$\vec{\mathbf{u}}^s \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{u}}^f \cdot \vec{\mathbf{n}} . \quad (\text{E.13})$$

Ceci est équivalent à dire qu'en tout point du contour $r = L(\theta)$, on a :

$$\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial \theta} \right] n_r + \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_z}{\partial r} \right] n_\theta = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \left[\frac{\partial (\mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif})}{\partial r} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (\mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif})}{\partial \theta} n_\theta \right] . \quad (\text{E.14})$$

En posant :

$$\vec{F}^{11}(\theta) = -\frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)L}}{\partial r} n_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)L}}{\partial \theta} n_\theta , \quad (\text{E.15a})$$

$$\vec{F}^{12}(\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)T}}{\partial \theta} n_r - \frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)T}}{\partial r} n_\theta , \quad (\text{E.15b})$$

$$\vec{F}^{13}(\theta) = -\frac{1}{\rho_f \omega^2} \left[\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial r} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \theta} n_\theta \right] \quad (\text{E.15c})$$

et

$$\vec{F}^1(\theta) = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \left[\frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)}}{\partial r} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)}}{\partial \theta} n_\theta \right] , \quad (\text{E.15d})$$

pour tout les points du contour $r = L(\theta)$, l'équation de continuité du déplacement normal devient :

$$\forall \vec{\mathbf{a}}, \forall \theta, \quad \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^L \cdot \vec{F}^{11}(\theta) \rangle + \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^T \cdot \vec{F}^{12}(\theta) \rangle + \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^{13}(\theta) \rangle = \langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^1(\theta) \rangle . \quad (\text{E.16})$$

Ceci constitue la première équation pour les inconnues \mathbf{A}^L , \mathbf{A}^T et \mathbf{T} .

E.2.2 Continuité de la contrainte normale

En tout point du contour $r = L(\theta)$, nous avons :

$$\sigma^s \vec{\mathbf{n}} = \sigma^f \vec{\mathbf{n}} . \quad (\text{E.17})$$

Ceci aboutit à deux équations de contrainte :

$$\sigma_{rr}^s n_r + \sigma_{r\theta}^s n_\theta = -(\mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif}) n_r \quad (\text{E.18a})$$

et

$$\sigma_{\theta r}^s n_r + \sigma_{\theta\theta}^s n_\theta = -(\mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif}) n_\theta . \quad (\text{E.18b})$$

Première équation de contrainte

L'équation E.18a peut s'exprimer, en tout point du contour $r = L(\theta)$, par :

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda k_L^2 \Phi + 2\mu \left[-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial \theta} \right] \right\} n_r \\ & + \mu \left[\frac{2}{r} \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 \Gamma_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Gamma_z}{\partial \theta^2} \right] n_\theta \\ & = -(\mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif}) n_r . \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

En posant :

$$\vec{F}^{21}(\theta) = \left\{ \lambda k_L^2 \vec{\Psi}^{(j)L} + 2\mu \left[-\frac{\partial^2 \vec{\Psi}^{(j)L}}{\partial r^2} \right] \right\} n_r + \mu \left[\frac{2}{r} \left(-\frac{\partial^2 \vec{\Psi}^{(j)L}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)L}}{\partial \theta} \right) \right] n_\theta , \quad (\text{E.20a})$$

$$\vec{F}^{22}(\theta) = 2\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)T}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)T}}{\partial \theta} \right] n_r + \mu \left[-\frac{\partial^2 \vec{\Psi}^{(j)T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)T}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}^{(j)T}}{\partial \theta^2} \right] n_\theta , \quad (\text{E.20b})$$

$$\vec{F}^{23}(\theta) = n_r \vec{\Psi} \quad (\text{E.20c})$$

et

$$\vec{F}^2(\theta) = -n_r \vec{\Psi}^{(j)} , \quad (\text{E.20d})$$

pour tout les points du contour $r = L(\theta)$, la première équation de contrainte devient :

$$\forall \vec{\mathbf{a}}, \forall \theta, \quad \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^L \cdot \vec{F}^{21}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^T \cdot \vec{F}^{22}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^{23}(\theta) \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^2(\theta) \right\rangle . \quad (\text{E.21})$$

Ceci constitue la deuxième équation pour les inconnues \mathbf{A}^L , \mathbf{A}^T et \mathbf{T} .

Seconde équation de contrainte

La seconde équation de contrainte E.18b peut s'exprimer, en tout point du contour $r = L(\theta)$, sous la forme :

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{2}{r} \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 \Gamma_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Gamma_z}{\partial \theta^2} \right] n_r \\ & + \left\{ \lambda k_L^2 \Phi + \frac{2\mu}{r} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Gamma_z}{\partial r \partial \theta} \right] \right\} n_\theta \\ & = -(\mathbf{p}_{inc} + \mathbf{p}_{dif}) n_\theta . \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

En posant à nouveau :

$$\vec{F}^{31}(\theta) = \mu \left[\frac{2}{r} \left(-\frac{\partial^2 \vec{\Psi}^{(j)L}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)L}}{\partial \theta} \right) \right] n_r + \left\{ \lambda k_L^2 \vec{\Psi}^{(j)L} + \frac{2\mu}{r} \left[-\frac{\partial \vec{\Psi}^{(j)L}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}^{(j)L}}{\partial \theta^2} \right] \right\} n_\theta , \quad (\text{E.23a})$$

$$\vec{F}^{32}(\theta) = \mu \left[\frac{2}{r} \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] n_r + \frac{2\mu}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Gamma_z}{\partial r \partial \theta} \right] n_\theta, \quad (\text{E.23b})$$

$$\vec{F}^{33}(\theta) = n_\theta \vec{\Psi} \quad (\text{E.23c})$$

et

$$\vec{F}^3(\theta) = -n_\theta \vec{\Psi}^{(j)}, \quad (\text{E.23d})$$

pour tout les points du contour $r = L(\theta)$, la seconde équation de contrainte devient :

$$\forall \vec{\mathbf{a}}, \forall \theta, \quad \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^L \cdot \vec{F}^{31}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^T \cdot \vec{F}^{32}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^{33}(\theta) \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^3(\theta) \right\rangle. \quad (\text{E.24})$$

Ceci constitue la troisième équation pour les inconnues \mathbf{A}^L , \mathbf{A}^T et \mathbf{T} .

E.3 Résolution du problème

Nous mis en évidence les trois équations suivantes, $\forall \vec{\mathbf{a}}, \forall \theta$:

$$\left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^L \cdot \vec{F}^{11}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^T \cdot \vec{F}^{12}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^{13}(\theta) \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^1(\theta) \right\rangle, \quad (\text{E.25a})$$

$$\left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^L \cdot \vec{F}^{21}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^T \cdot \vec{F}^{22}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^{23}(\theta) \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^2(\theta) \right\rangle \quad (\text{E.25b})$$

et

$$\left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^L \cdot \vec{F}^{31}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{A}^T \cdot \vec{F}^{32}(\theta) \right\rangle + \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^{33}(\theta) \right\rangle = \left\langle \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{T} \cdot \vec{F}^3(\theta) \right\rangle. \quad (\text{E.25c})$$

$\vec{F}^{11}(\theta)$ est un vecteur dont les composantes $F_n^{11}(\theta)$ sont des fonction 2π périodiques. Nous pouvons donc les décomposer en série de Fourier :

$$\forall n, \quad F_n^{11}(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_{n,p}^{11} e^{ip\theta}. \quad (\text{E.26})$$

Nous pouvons également définir un opérateur linéaire $\mathbf{R}^{11} = (R_{n,p}^{11})$ tel que :

$$\vec{F}^{11}(\theta) = \mathbf{R}^{11} \cdot \vec{\Theta}, \quad (\text{E.27})$$

avec $\vec{\Theta} = (e^{ip\theta})$.

Dans le même esprit, on peut définir les opérateurs linéaires \mathbf{R}^{12} , \mathbf{R}^{13} , \mathbf{R}^1 , \mathbf{R}^{21} , \mathbf{R}^{22} , \mathbf{R}^{23} , \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^{31} , \mathbf{R}^{32} , \mathbf{R}^{33} et \mathbf{R}^3 .

En identifiant les modes des série de Fourier, l'ensemble des trois équations précédentes devient un système linéaire classique de trois équations à trois inconnues et de la forme :

$$\mathbf{A}^L \cdot \mathbf{R}^{11} + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{R}^{12} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^{13} = \mathbf{R}^1$$

$$\mathbf{A}^L \cdot \mathbf{R}^{21} + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{R}^{22} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^{23} = \mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{A}^L \cdot \mathbf{R}^{31} + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{R}^{32} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^{33} = \mathbf{R}^3$$

La résolution linéaire de ce système nous permet de déterminer l'opérateur linéaire \mathbf{T} . Quelque soit la nature de l'onde incidente, le champ acoustique diffusé par le cylindre est donc parfaitement connu.

Bibliographie

- [Abb95] ABOUD T. Diffraction par un réseau courbe. Approximation par un réseau plan fini. *C. R. Acad. Sci. Paris*, no. 320, pp. 113–118, 1995. Série I.
- [Bec97] BÉCOT F.-X. Etude de la diffusion d'une cible à géométrie cylindrique à proximité d'une interface eau/sédiments. Rapport de d.e.a., Université du Havre, juin 1997.
- [Bor28] BOREL E. Leçons sur les séries divergentes. Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [Bos80a] BOSTRÖM A. Scattering of stationary acoustic waves by an elastic obstacle immersed in a fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 67, no. 2, pp. 390–398, février 1980.
- [Bos80b] BOSTRÖM A. Multiple scattering of elastic waves by bounded obstacles. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 67, no. 2, pp. 399–413, février 1980.
- [Bre90] BREKHOVSKIKH L. M. et GODIN O. A. Acoustics of layered media I. Plane and quasi-plane waves, volume 5 of *Springer series on wave phenomena*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Bri70] BRILL D. et ÜBERALL H. Transmitted waves in the diffraction of sound from liquid cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 47, pp. 1467–1469, 1970.
- [Bri71] BRILL D. et ÜBERALL H. Acoustic waves transmitted through solid cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 50, pp. 921–939, 1971.
- [Bru98] BRUNEAU M. Manuel d'acoustique fondamentale. Etudes en mécanique des matériaux et des structures. Hermes, Paris, 1998.
- [Can93] CANDELPERGER B., NOSMAS J. et PHAM F. Approche de la résurgence. Actualités mathématiques. Hermann, Paris, 1993.
- [Cha90] CHABAT B. Introduction à l'analyse complexe. Tome I. Fonctions d'une variable. Collection méthodes. Editions Mir, Moscou, 1990.
- [Chu95] CHUDINOVICH I. Y. et DIENG S. Les méthodes de la théorie des potentiels dans les problèmes de la diffraction des ondes acoustiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, no. 320, pp. 885–889, 1995. Série I.
- [Clo90] CLOTTEAU B., CONOIR J.-M., ROUSSELOT J.-L. et DEREM A. Ondes de Franz et onde de Stoneley généralisées pour un cylindre élastique immergé. *J. Acoustique*, vol. 3, no. 3, pp. 213–242, septembre 1990.
- [Con87] CONOIR J.-M. Diffusion acoustique par un cylindre. Théorie modale et approximation de l'acoustique géométrique. Thèse de docteur d'état, Université de Paris 6, mars 1987.
- [Con91] CONOIR J.-M., GÉRARD A. et DEREM A. Ondes acoustiques transmises et séries de Debye généralisées. I. Traitement des interfaces planes. *J. Acoustique*, vol. 4, no. 2, pp. 159–200, avril 1991.

-
- [Der79] DEREM A. Relation entre la formation des ondes de surface et l'apparition de résonances dans la diffusion acoustique. *Revue du CETHEDDEC*, no. 58, pp. 43–79, 1979.
- [Dic76] DICKEY J. W., FRISK G. V. et ÜBERALL H. Whispering gallery wave modes on elastic cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 59, pp. 1339–1346, 1976.
- [Die80] DIEUDONNÉ J. Calcul infinitésimal. Collection méthodes. Hermann, Paris, 1980.
- [Doo68] DOOLITTLE R. D., ÜBERALL H. et UGINČIUS P. Sound scattering by elastic cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 43, pp. 1–14, 1968.
- [Dum65] DUMERY G. Sur les distributions ponctuelles attachées aux ondes cylindriques. *C. R. Acad. Sc. Paris*, no. 260, pp. 3857–3860, avril 1965. Groupe 4.
- [Dum67] DUMERY G. Sur les distributions des ondes sonores par des grilles ou des réseaux d'obstacles. *Acustica*, vol. 18, pp. 334–341, 1967.
- [Dum84] DUMERY G. Propagation d'ondes sonores dans un milieu comportant des inclusions périodiques. *Revue du CETHEDDEC*, no. 78, pp. 171–179, 1984.
- [Faw96a] FAWCETT J. A. A plane-wave decomposition method for modelling scattering from objects and bathymetry in a waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 100, no. 1, pp. 183–192, juillet 1996.
- [Faw96b] FAWCETT J. A. Acoustic scattering from cylindrical objects embedded between two half-spaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 100, no. 5, pp. 3053–3060, novembre 1996.
- [Fil94] FILIPPI P. Acoustique générale. Collection d'acoustique. Les éditions de physique, Paris, 1994.
- [Fla78] FLAX L., DRAGONETTE L. R. et ÜBERALL H. Theory of elastic resonance excitation by sound scattering. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 63, pp. 723–731, 1978.
- [Fri75] FRISK G. V., DICKEY J. W. et ÜBERALL H. Surface wave modes on elastic cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 58, pp. 996–1008, 1975.
- [Fri76] FRISK G. V. et ÜBERALL H. Creeping waves and lateral waves in acoustic scattering by large elastic cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 59, pp. 46–54, 1976.
- [Gas97] GASQUET C. et Witomski P. Analyse de Fourier et applications- filtrage, calcul numérique, ondelettes. Masson, Paris, 1997.
- [Gau94] GAUNAURD G. C. et HUANG H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 96, no. 4, pp. 2526–2536, octobre 1994.
- [Gau95] GAUNAURD G. C., HUANG H. et STRIFORS H. C. Acoustic scattering by a pair of spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 98, no. 1, pp. 495–507, juillet 1995.
- [Ges87] GESPA N. La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple. Théories et expériences. Imprimerie du CEDOCAR, Paris, 1987.
- [Hac88] HACKMAN R. H. et SAMMELMANN G. S. Multiple-scattering analysis for a target in an oceanic waveguide. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 84, no. 5, pp. 1813–1825, novembre 1988.
- [Hua95] HUANG H. et GAUNAURD G. C. Acoustic scattering by a plane wave by two spherical elastic shells. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 98, no. 4, pp. 2149–2156, octobre 1995.
- [Khe95] KHEDDIOUI E. Diffusion acoustique par deux tubes élastiques immergés. Thèse, Université du Havre, juin 1995.

-
- [Kog31] KOGBETLIANTZ E. Sommatons des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques. *Mémorial des sciences mathématiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1931. Fascicule LI.
- [Kri78] KRISTENSSON G. et STRÖM S. Scattering from buried inhomogeneities—a general three dimensional formalism. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 64, no. 3, pp. 917–936, septembre 1978.
- [Lel78] LELONG-FERRAND J. et ARNAUDIES J. Algèbre, volume 1 of *Cours de mathématiques*. Dunod Université, Paris, 1978.
- [Neu69] NEUBAUER W. G., UGINČIUS P. et ÜBERALL H. Theory of creeping waves in acoustics and their experimental demonstration. *Z. Naturforsch.*, vol. 24 a, pp. 691–700, 1969.
- [Pet74] PETERSON B. et STRÖM S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 56, no. 3, pp. 771–780, septembre 1974.
- [Pet75] PETERSON B. et STRÖM S. Matrix formulation of acoustic scattering from multilayered scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 57, no. 1, pp. 2–13, janvier 1975.
- [San81a] SANCAR S. et PAO Y.-H. Spectral analysis of elastic pulses backscattered from two cylindrical cavities in a solid. Part I. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 69, no. 6, pp. 1591–1596, juin 1981.
- [San81b] SANCAR S. et SACHSE W. Spectral analysis of elastic pulses backscattered from two cylindrical cavities in a solid. Part II. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 69, no. 6, pp. 1597–1609, juin 1981.
- [Sar94] SARKISSIAN A. Multiple scattering effects when scattering from a target in a bounded medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 96, no. 5, pt. 1, pp. 3137–3144, novembre 1994.
- [Som49] SOMMERFELD A. Partial differential equations in physics. Academic Press, New-York, 1949.
- [Twe52a] TWERSKY V. Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 24, no. 1, pp. 42–46, janvier 1952.
- [Twe52b] TWERSKY V. Multiple scattering of radiation by an arbitrary planar configuration of parallel cylinders and by two parallel cylinders. *J. Appl. Phys.*, vol. 23, no. 4, pp. 407–414, avril 1952.
- [Wats18a] WATSON G. N. The diffraction of electric waves by the earth. *Proc. Roy. Soc.*, vol. A 95, pp. 83–99, 1918.
- [Wats18b] WATSON G. N. The transmission of electric waves round the earth. *Proc. Roy. Soc.*, vol. A 95, pp. 546–563, 1918.
- [Wats45] WATSON G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, 2nd édition, 1945.
- [Whe37] WHEELER J. A. On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure. *Phys. Rev.*, vol. 52, pp. 1107–1122, 1937.
- [You75] YOUNG J. W. et BERTRAND J. C. Multiple scattering by two cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 58, no. 6, pp. 1190–1195, décembre 1975.

Résumé

Cette thèse traite du problème de la diffusion acoustique par un objet à géométrie cylindrique situé à proximité d'une interface plane. Nous avons cherché à construire une modélisation de ce problème la plus générale possible, dans le cadre de la théorie modale. C'est ainsi que nous avons développé une *théorie des images généralisée*.

Ce nouveau modèle théorique est explicitement décrit. Et, nous avons mis en évidence les domaines d'applications et les restrictions éventuelles associés à ce modèle. La comparaison avec les théories de rayons et les méthodes intégrales a pu être établie, et a confirmé la cohérence de cette nouvelle théorie.

Nous avons montré qu'elle pouvait être employée avantageusement pour traiter des configurations très concrètes : structure cylindrique immergée et située à proximité d'un fond sédimentaire. Nous avons également montré que le modèle convenait au cas d'une structure cylindrique enfouie dans fond sédimentaire sous-marin.

Enfin, le dernier chapitre apporte des contributions originales à la modélisation des cylindres à section non-circulaire en théorie modale.

Abstract

This thesis deals with the acoustic scattering by a cylindrical object in the vicinity of an elastic plane interface. In modal theory context, we have tried to develop the most general model. Actually, we have defined a new theoretical method called *Generalised Images Method*.

In the first part of this document, we describe the mathematical expression of this new method. Then, we analyse the theoretical and numerical limits. In order to verify the coherence of the new model, we compare it with others standard theories (integral method, geometrical theory).

We prove the Generalised Images Method can be used in concrete experimental situation : a underwater cylinder lain nearby a plane sedimentary interface (sea-beds). More, we show that scattering by a cylindrical object buried in an underwater sedimentary media can be described using Generalised Images Method.

Eventually, we consider the scattering by a cylinder with not-circular section, and we develop a new approach in modal theory.